"**0**" ... 1

"f" ... 3

"~" ... 5

"$\vee$" ... 7

"$\forall$" ... 9

"**(**" ... 11

"**)**" ... 13

Aksiomatiske systemer og Gödels sætninger

Jørgen Ebbesen

Aksiomatiske systemer og Gödels sætninger.

Her kan man fx tage udgangspunkt i et eller flere eksempler på aksiomatiske systemer (fx fra aritmetik, algebra og mængdelære), for at belyse begreberne aksiomatisk system, ækvivalens, konsistens, uafhængighed, fuldstændighed og kategoricitet. Der skal desuden gives en kort præsentation af Gödels sætninger og deres matematikfilosofiske betydning.

> To gamle venner (vi kan jo kalde dem for A og B) mødes en gang om ugen for at fortælle hinanden vittigheder. Efter at have dyrket denne fælles passion i mange år, bliver de enige om at skrive vittighederne ned og nummerere dem. En aften, hvor de har lidt mindre tid, end de plejer, får de den ide, at de i stedet for at fortælle vittighederne, kan nøjes med at sige nummeret.
>
> A: 27!
> B: (*Griner behersket*) Nej, den her er bedre: 311 !
> A: (*Slår sig på lårene og skraldgriner*) 417!
> B: (*Ingen reaktion*)
> A: (*Gentager lidt højere og griner selv højlydt*) 417!
> B: (*Stadig ingen reaktion*)
> A: (*Skuffet og uforstående*) Jeg sagde 417. Hvorfor griner du ikke ?
> B: Jeg havde hørt den før.

Før vi går over til metamatematikken, vil vi forsøge at sætte den aksiomatiske metode i historisk perspektiv. I løbet af 1800-tallet fik Euklids geometri konkurrence af ikke euklidiske geometrier, de reelle tal fik konkurrence af komplekse tal og kvaternioner, og samtidig fik de gode gamle regneoperationer konkurrence fra algebraens kompositioner. Analysen kunne fremvise ejendommeligheder som Peanos kurve, Cantors mængdelære er spækket med ejendommeligheder, og Russell havde et ejendommeligt forhold til sin barber. Den aksiomatiske metode fik en renæssance[1)] i form af en udbredt aksiomatisering af matematikkens forskellige fagområder, og matematikkens grundlag blev genstand for grundige undersøgelser De tre store grundlagsfilosofier fra starten af det tyvende århundrede: logicismen, formalismen og intuitionismen – hvor forskellige de ellers måtte være – byggede alle tre på den aksiomatiske metode.

Euklids aksiomatiske metode kan betegnes som naiv i den forstand, at hans diskurs omhandlede virkelige objekter, som han opnåede viden om gennem diskursen. Hans aksiomsystem var deskriptivt. – det beskrev virkeligheden, som vi går ud fra er modsigelsesfri – så konsistensen af aksiomsystemet var garanteret på forhånd. Den matematiske udvikling gennem 2000 år havde imidlertid vist, at man skal være varsom med, hvad man tager for givet (paradokser burde ikke forekomme), og stillet spørgsmålstegn ved virkeligheden af objekterne (flere matematiske modeller, der beskriver virkeligheden lige godt, gør det umuligt at vælge en naturlig model).[2)] Der rejser sig en række nye spørgsmål, når aksiomsystemerne erkendes at være præskriptive. Et af dem er, om det overhovedet er konsistent, for ellers kan vi konkludere hvad som helst, og så kan det også være lige meget. Da det er den aksiomatiske metode, vi vil studere her, vil vi forbigå problemerne, der opstår ved fortolkningen af inputtet (begrebernes betydning, for ikke at tale om deres eksistens) og outputtet (resultaternes sandhed) af den aksiomatiske maskine.

Hilbert er ophavsmanden til studiet af aksiomsystemerne, metamatematikken. Hilbert havde en plan. Kuppet over alle kup. Han skulle bruge:

- matematikken frem til 1900
- metamatematikken
- og en uformel tolkning af metamatematikken

til at sikre matematikkens grundlag. Planen startede med *Grundlagen der Geometrie* fra 1899, hvori han præsenterede et konsistent aksiomsystem (under forudsætning af konsistens af de reelle tal) for den plane geometri, se side 83-86 i Eves.[2]

Hans indfaldsvinkel på af den aksiomatiske metode betegnes normalt som formel – et par andre gloser, der dækker over det samme, men er mere negativt ladede, er indholdsløs og illusionsløs. Han udtaler sig om egenskaber ved aksiomsystemet, men han gør sig ikke nogen illusion om, at de primitive termer har et indhold udover det, de får i kraft af aksiomerne, og hans sandhedsbegreb er lidt fladt: Da objekterne er blottet for mening, skal vi ikke tolke resultaterne i sandhedstermer, en sætning er sand, hvis den kan udledes af aksiomerne.

Hilbert undgår altså en intrikat ontologisk diskussion og den deraf følgende sandhed/bevis diskussion. Manden var jo ikke dum, så han vidste nok, hvad han gjorde: Det er smart at fokusere på metoden i første omgang, og så lade de andre spørgsmål ligge til senere.[3)]

Definition Ved et *aksiomatisk system* forstås et par (V,A), hvor V betegner aksiomsystemets variable (udefinerede begreber, relationer, kompositioner) og A betegner aksiomsystemets aksiomer (åbne udsagn i de variable). Den tilsvarende *matematiske teori* består af *teoremerne*, som er de åbne udsagn, der kan udledes fra A.

Vi vil i første omgang afstå fra eksempler og i stedet fremhæve, at vi er vokset op med den aksiomatiske metode. Euklid i realskolen. Kristensen og Rindung – det indebar bl.a. Boolsk algebra, propositions- og prædikatslogik i de første blækregninger – i gymnasiet. Metriske rum og abstrakte vektorrum på Mat 1 på Universitetet. Det var en lidt spøjs oplevelse at undervise i lineær algebra og klassisk analyse som ekstern lektor sytten år senere. Ak, hvor forandret! Der var gået lidt for meget $\mathbb{R}^n$ og matrix-algebra i den efter vor smag.[4)]

Definition To aksiomatiske systemer (V,A) og (V',A') siges at være *ækvivalente*, hvis de variable i V' kan defineres vha. de variable i V og aksiomerne i A' er teoremer i A – og vice versa.

Eves har på side 154-155 en længere diskussion af ækvivalente aksiomatiske systemer. Skal man tilstræbe få aksiomer, eller skal man tilstræbe atomisering af aksiomerne. Eves diskussion er meget kvantitativ[5)]. I forlængelse af den lidt perspektivløse diskussion vil vi lige nævne, at opstillingen af et aksiomatisk system også er en pædagogiske opgave, og det er med dette for øje, at man skal afveje de to modsat rettede hensyn.

Definition Ved en *konkret fortolkning* af et aksiomatisk system (V,A) forstås en meningsbevarende afbildning af det aksiomatiske system ind i virkeligheden, så billedet af A består i sande udsagn. Billedet kaldes en *konkret model* for (V,A).

Bemærk, at en konkret model er endelig og konsistent (fordi virkeligheden er det). Aksiomsystemerne for grupper, ringe og legemer er konsistente, fordi der findes konkrete fortolkninger

Definition Ved en *ideal fortolkning* af et aksiomatisk system (V,A) forstås en meningsbevarende afbildning af det aksiomatiske system ind i et andet aksiomatisk system, således at billedet af A består af teoremer. Billedet kaldes en *ideal model* for (V,A). Hvis der findes en ideal fortolkning af et aksiomatisk system, er dette *relativt konsistent* i den forstand, at hvis det system, (V,A) kan indlejres i, er konsistent, så er (V,A) det pinedød også.

Poincarré model for den ikke-euklidiske geometri er en ideal model indlejret i den euklidiske geometri.

Definition To fortolkninger af et aksiomatisk system siges at være *isomorfe*, hvis der findes en bijektiv meningsbevarende afbildning mellem dem.

Definition Et aksiomatisk system (V,A) siges at være *inkonsistent* hvis der findes et åbent udsagn s over V, således, at både s og ~s er teoremer.

Inkonsistens af et aksiomatisk system er *ikke* til at leve med. Definitionen udtaler måske kun, at systemet skal have en skønhedsplet – herregud, et enkelt teorem vælter vel ikke hele læsset ? Jo, det gør! Pletten er ondartet, den spreder sig, som vi så i timen, til det hele – alle åbne udsagn over V bliver teoremer. Beviset er enkelt: Antag s og ~s er teoremer. Hvis p og q er vilkårlige åbne udsagn, så er $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ et teorem.[6)] Substitueres p med s fås teoremet $s \Rightarrow (\sim s \Rightarrow q)$. Da s var et teorem, sluttes heraf, at $\sim s \Rightarrow q$ er et teorem. Da ~s var et teorem, sluttes nu, at q er et teorem.[7)]

Definition Et aksiom i et aksiomatisk system (V,A) siges at være *uafhængigt* af de andre, hvis det ikke kan udledes fra de øvrige aksiomer. Hvis alle aksiomer er uafhængige af de andre, kaldes (V,A) *uafhængigt*.

I opgaven *Geometri og grundlag* beskæftigede vi os indgående med to tusind års kamp for at vise, at parallelaksiomet kunne udledes af de andre aksiomer for den euklidiske geometri. Det lykkedes som bekendt ikke. Parallelaksiomet er uafhængigt af de øvrige aksiomer. Poincarrés ideale model for den ikke-euklidiske geometri viser, at negationen af parallelaksiomet er foreneligt med de øvrige aksiomer, altså kan parallelaksiomet ikke udledes af disse.[8)]

Definition Et konsistent aksiomatisk system (V,A) siges at være *fuldstændigt*, hvis der ikke findes et åbent udsagn s over V, således at (V, (A,s)) er konsistent og uafhængigt.

Aksiomsystemet for abstrakte endeligt dimensionale vektorrum $\mathcal{V}$ over $\mathbb{R}$ (hhv. $\mathbb{C}$) er ufuldstændigt. Vi kan f.eks. tilføje aksiomet, at dimensionen skal være 17, uden at aksiomsystemet bliver inkonsistent (jf. eksemplet nedenfor). Som eksemplet antyder, er ufuldstændigheden i nogle sammenhæng en dyd, fordi den tillader os at studere fælles træk for familier af objekter på en gang. Hvis formålet derimod er at give et "signalement" af et bestemt objekt, er ufuldstændighed uheldigt.

Definition Hvis alle fortolkninger af (V,A) er isomorfe, siges aksiomsystemet at være *kategorisk*.

Hvis et aksiomatisksystem både er kategorisk og konsistent, er det fuldstændigt, se bevisskitsen side 161 i Eves.[9)]

Det kan vises (vi gør det ikke her), at aksiomsystemerne for $\mathbb{R}$ (hhv. $\mathbb{C}$) er kategoriske.

Aksiomsystemet for abstrakte n-dimensionale vektorrum $\mathcal{V}$ over $\mathbb{R}$ (hhv. $\mathbb{C}$) er kategorisk. Dette indses ved at vælge en fast basis. Afbildningen, der afbilder en vektor i dens koordinatsæt med hensyn til den valgte basis er oplagt en isomorfi af $\mathcal{V}$ på $\mathbb{R}^n$ (hhv. $\mathbb{C}^n$).

Resten af opgaven er helliget en antydning af ideen bag og teknikken i beviset for Kurt Gödels (1906-1978) ufuldstændighedssætninger. Det detaljerede bevis blev publiceret i *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (1931). Løst sagt siger de:

Gödels ufuldstændighedssætninger

Et aksiomatisk system, som omfatter de naturlige tal, er enten inkonsistent eller for svagt til, at alle sande påstande om de naturlige tal kan udledes fra aksiomerne.

Konsistensen af et sådant aksiomatisk system, kan hverken vises eller modbevises inden for systemet.

Gödel tager, som det fremgår af titlen, udgangspunkt i Principia Mathematicas formelle system af de naturlige tal. Ironisk nok vil formuleringen i resten af opgaven være forholdsvis uformel.

Definition Et *formelt system* består af:

Symboler (herunder *variable*)
Syntaks, som er regler for, hvilke symbolstrenge, der er læsbare. Disse kaldes *formler*.
Aksiomer, som er formler, der tages for givne.
Slutningsregler, som er regler for, hvordan formler kan omformes.
Teoremerne er formler som fremkommer ved anvendelse af slutningsreglerne på aksiomerne.
Systemet kaldes *inkonsistent*, hvis der findes en formel f, således, at både f og ~f er teoremer.
Systemet kaldes *komplet*, hvis det for alle formler gælder, at enten f eller ~f er teoremer.

Et bevis for et teorem i et formelt system er en streng af formler,

- der starter med et teorem (inkl. aksiomerne),
- hvor man af en formel kan slutte den næste,
- som slutter med det teorem, der skal vises.

Gödels ide er at nummerere symboler, variable, formler og beviser. Allerede fra starten er der noget, vi ikke forstår: Hvad er det egentlig for en mængde, Gödel afbilder det formelle system ind i? (vi ved godt, at det er de naturlige tal, men hvad nu hvis aksiomsystemet for de naturlige tal er inkonsistent, hvad bliver der så af nummereringens injektivitet? Hvorfor ryger Gödels argumentation ikke på gulvet med et brag?)

Nummereringen (kaldet Gödeltallene) af de logiske symboler står på forsiden. For at gøre beviset lidt enklere anvender Gödel færre logiske tegn, end vi andre bruger til dagligt, men det er velkendt (se f.eks. Eves 249), at antallet kan reduceres. Symbolet **f** står for Peanos efterfølger-afbildning.

Gödel tillader tællelig mange variable x_1, x_2, x_3,.. og disse tildeles Gödeltall af formen p, hvis de er af type1 (tal) p^2, hvis de er af type 2, p^3, hvis de er af type 3.. , hvor p er primtal større end 13,

Gödeltallet for en formel defineres som $2^{n_1}3^{n_2}5^{n_3}..p_k^{n_k}$, hvor n_1, n_2, n_3,.., n_k er Gödeltallene for de symboler, der indgår i formlen, og 2, 3, 5,.., p_k er de første k primtal.

Gödeltallet for et bevis defineres på præcis samme måde som $2^{n_1}3^{n_2}5^{n_3}..p_k^{n_k}$, hvor n_1, n_2, n_3,.., n_k er Gödeltallene for de formler, der indgår i beviset, og 2, 3, 5,.., p_k er de første k primtal.

Ifølge entydigheden af primfaktoropløsningen af et naturligt tal er tildelingen af Gödeltal en injektiv afbildning af det formelle system ind i de naturlige tal. Men ikke nok med det. Vi kan angive den omvendte afbildning: Foretag primfaktoropløsningen af Gödeltallet (for bevisernes vedkommende skal eksponenterne i primfaktoropløsningen også opløses), og så har vi rekonstrueret symbolerne, formlerne og beviserne. Vi bemærker, at vi kan se, om et Gödeltal stammer fra et symbol, en formel eller et bevis:

- Gödeltallet for et symbol er ulige.

- Gödeltallet for en formel er lige, og eksponenterne i primfaktoropløsningen er ulige (de er Gödeltal for symboler).

- Gödeltallet for et bevis er lige, og eksponenterne i primfaktoropløsningen er lige (de er Gödeltal for formler).

Fidusen er nu, at det formelle systems slutningsregler kan oversættes til regneregler for Gödeltal.

Og resultater for Gödeltal opnået vha. disse regneregler kan oversættes tilbage til udsagn om det formelle system. Det er nærliggende at sammenligne Gödels aritmetisering af metamatematikken med den analytiske geometris algebraisering af geometrien.

Vi skal være ærlige og indrømme, at vi har brugt meget tid på at læse Gödels originalartikel, uden rigtigt at forstå den. Den ser så besnærende enkel ud, men vi er tilbøjelige til at mene, at man skal være mere hjemme i metamatematikken, end vi er, for at få rigtig hul på beviset. Vi henviser derfor til Bunch[1] side 141-152, som det følgende bygger på.

Lad P(x,y) være udsagnet: Der findes et x, så x er Gödeltallet for et bevis for den formel y er Gödeltal for.

Bemærk, at vi ikke på forhånd antager, at y er et teorem. Det er altså ikke sikkert, at der til et givent y findes x, så P(x,y).[10)] Vi kan opfatte P(x,y) som et udsagn i det formelle system som følge af korrespondancen mellem det formelle system og Gödeltallene.

En af slutningsreglerne for det formelle system er, at man kan substituere et tal for en variabel. Tricket består i at substituere en (ligegyldig hvilken, bare den er af type1) variabel i en formel med Gödeltallet for formlen. Lad Q(z,y) være udsagnet: y er Gödeltallet for den formel vi får ved at indsætte z i den formel z er Gödeltal for. Lige som før kan vi opfatte kan vi opfatte Q(z,y) som et udsagn i det formelle system.

Betragt nu udsagnet $\sim P(x,y) \wedge Q(z,y)$ i det formelle system. Det har et Gödeltal, som vi passende kan kalde g. Det er tilladt at substituere z med g, og vi får.

$\sim P(x,y) \wedge Q(g,y)$

Dette udsagn er en matematisk version af *Kretenseren* (som siger, at alle kretensere lyver), vi er nemlig ikke i stand til at afgøre, om påstanden er et teorem (uafgørbar med Gödels betegnelse) :

For ifølge definitionen af Q(z,y) er y Gödeltallet for påstanden. Hvis den var et teorem, ville det stride mod ~P(x,y). Vi er ikke så glade for selvmodsigelser, så vi forsøger igen: På den anden side, hvis y ikke er (Gödeltallet for) et teorem, så er påstanden sand. Altså findes der sande sætninger, vi ikke kan bevise.

Ovenstående skulle gøre det ud for en bevisskitse til den første af de anførte ufuldstændighedssætninger. Gödel går videre og viser, at en af de uafgørbare påstande er: Dette system er konsistent.

Med sine sætninger slukkede Gödel definitivt lyset for Hilberts formalistiske projekt. Nogle mennesker har fejlagtigt tolket resultaterne (udtryk for ønsketænkning ?) som, at matematikken afgik ved en brat og uventet død i 1931.

Havde Gödel bevist, at de reelle tal udgjorde et inkonsistent system, ville vi overveje at skrive dødsattesten under, men vi ville først forsøge genoplivning ved at skifte aksiomerne ud. Tallene kom trods alt først, så de har krav på at være her. Nu var det jo trods alt ikke det, Gödel viste, og vi har det med matematikken, som vi har det med vores sommerhus. Huset er fra 1896. Det ser sundt og godt ud, det har stået så længe, at hvis det skulle brase sammen pga. skjulte mangler, så var det såmænd allerede sket. Vi regner med, at det nok skal stå vores tid ud.

Med Gödels sætninger brast en smuk drøm om et absolut sikkert grundlag for matematikken. Men hvor finder man egentlig det – eksempler efterlyses! Vi har svært ved at tro, at de reelle tal skulle være et inkonsistent system. Der er mere, der umiddelbart taler for, at vi må affinde os med, at der er nogle spørgsmål om de naturlig tal, vi aldrig får svaret på

Vi vil afslutningsvis understrege, at den aksiomatiske metode er andet og mere end et grundlag for matematikken i den grundlagsteoretiske forstand. Den aksiomatiske metode er en integreret del af matematikkens særlige sproglige register.[11)] Den aksiomatiske metode kan bruges til at systematisere den matematiske viden og derved blive en kilde til erkendelse: Når man udforsker matematikkens mysterier på egen hånd, er det lige som at vandre uden kompas uden for de afmærkede stier i bjergene uden at vide præcis, hvor man skal hen. Den erfarne vandrer kan læse landskabet og skal såmænd nok overleve. Men den mest naturlige vej, kan ende på et klippefremspring, hvor der er lodret ned, og man er nødt til at vende om. Og der er stor risiko for at fare vild. Måske er det umuligt at nå derhen, hvor man gerne vil, fordi der er for stejlt. Vandrer man derimod ad stierne, er det let at finde vej, fordi erfarne vandrere har gjort arbejdet i forvejen. Og en tilsyneladende uindtagelig top kan vise sig at være overkommelig, hvis man følger stien, om end den kan være så smal, at man skal passe på ikke at miste balancen og styrte i afgrunden. Belønningen for al ens møje og besvær kan være fyrstelig i form af den smukkeste udsigt. Den aksiomatiske metode er en metode til at kortlægge det matematiske landskab, så man bedre kan finde vej.

1) Idet vi beder læseren undskylde genbruget fra en tidligere opgave, citerer vi endnu en gang Kline[4] , som på side 1024 skriver: *Beyond its achievements in subject matter, the nineteenth century reintroduced rigorous proof. No matter what individual mathematicians may have thought about the soundness of their results, the fact is that from about 200 B.C. to about 1870 almost all of mathematics rested on an empirical and pragmatic basis. The concept of deductive proof from explicit axioms had been lost sight of. It is one of the astonishing revelations of the history of mathematics that this ideal of the subject was, in effect, ignored during the two thousand years in which its content expanded so extensively.*

Kline fortsætter på side 1025: *Not only did this destroy the very notion of the self-evidency of axioms and their too-superficial acceptance, but the work revealed inadequacies in proofs that had been regarded as the soundest in all of mathematics. The mathematicians realized that they had been gullible and had relied on intuition.*

2) Vi er fanget i en anakronisme. Ordet model er udtryk for en moderne tankegang, hvor vi accepterer tanken om, at flere matematiske beskrivelser er mulig..

3) Ifølge Hersh[3] side 160 (vi har selv været inde på det samme i opgaven *Geometri og grundlag)*, var Hilbert ikke hardcore formalist, når han trak i arbejdstøjet som matematiker. Han opfattede ikke selv objekterne som meningsløse.

4) Misforstå os ikke. Foxbys noter var spændende og velskrevne. Men sammenlignet med Brøndsteds! Vi hverken kan eller vil løbe fra vor fortid. Selv om det kan føles lidt absurd set i lyset af, hvor svært de unge mennesker i gymnasiet har ved at forstå (acceptere relevansen af) beviser, vil vi påpege, at den aksiomatiske metode kan være fremragende som pædagogisk metode.

5) Svaret er teknisk set hamrende banalt. Man kan koge et hvilket som helst aksiomsystem ind til et enkelt aksiom vha. konjugation. Og der er ingen grænse opadtil. Udsagnet *tallet er 17* kan jo også formuleres: Tallet er helt, det er ikke 18, det ikke 19, det er ikke 20..Vor sjovt er det egentlig ? (Eves morer sig!)

6) Implikationspile er kun problematiske, hvis det, der står der, hvor pilen starter, er sandt. Men hvis p er sand, er ~p falsk, og så er pilen i parentesen sand. (Man kan selvfølgelig også opstille sandhedstabeller).

7) Vi benytter reglen $(p \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow r$ (som stort set er definitionen af implikationen $p \Rightarrow r$) et par gange. Første gang med p=s og $r = (\sim s \Rightarrow q)$. Anden gang med p=~s og r=q.

8) Argumentet forudsætter konsistens af den euklidiske geometri.

9) Vi kan ikke dy os for at gøre opmærksom på en pinlig fejl nederst side 161 i Eves. Først viser han, at

(V,A) er kategorisk $\Rightarrow$ (V,A) er fuldstændigt

hvorpå han hævder, at ufuldstændighed kan eftervises ved at angive to ikke-isomorfe fortolkninger af (V,A). Han benytter altså

~((V,A) er kategorisk) $\Rightarrow$ ~((V,A) er fuldstændigt)

Han burde nok nærlæse side 248 nederst i Eves. I forlængelse af diskussionen om matematikkens fallibilisme i opgaven *De humanistiske matematikfilosofier* vil vi spinde en ende: Eves brøler er et eksempel på, at matematikere begår fejl – det er der ikke noget forbavsende i! Det bemærkelsesværdige er, at fejl i matematik er så indiskutable, som de er! Vi skal ikke til at diskutere, om det nu også er en fejl.

10) På den anden side: Hvis x er Gödeltallet for et bevis, afslører teoremet, som sætningen viser, sig som eksponenten til det største primtal i x's primtalsopløsning.

11) Inspireret af Winsløw[5].

[1] Bunch, Brian (1997): *Mathematical Fallacies and Paradoxes*, Dover

[2] Eves, Howard (1997): *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, *3. ed*., Dover.

[3] Hersh, Reuben (1998): *What is Mathematics, Really?*,Vintage.

[4] Kline, Morris (1990): Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press.

[5] Winsløv, Carl (1998): *Matematikkens sproglighed som didaktisk potentiale*, Nordisk matematik didaktik, 6 no. 2, p 29-40.

Idet vi undertrykker vor kvalme over de ideologiske undertoner på web-stedet, henleder vi læserens opmærksomhed på den fremragende web-udgave af Gödels *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems 1* på www.ddc.net/ygg/etext/godel. Gödels noter er klikbare, så man ikke skal sidde og bladre. Oversætteren forord og introduktionen er ligeledes forsynet med links til de relevante steder i artiklen og til baggrundsoplysninger i Stanford Encyclopedia of Philosophy