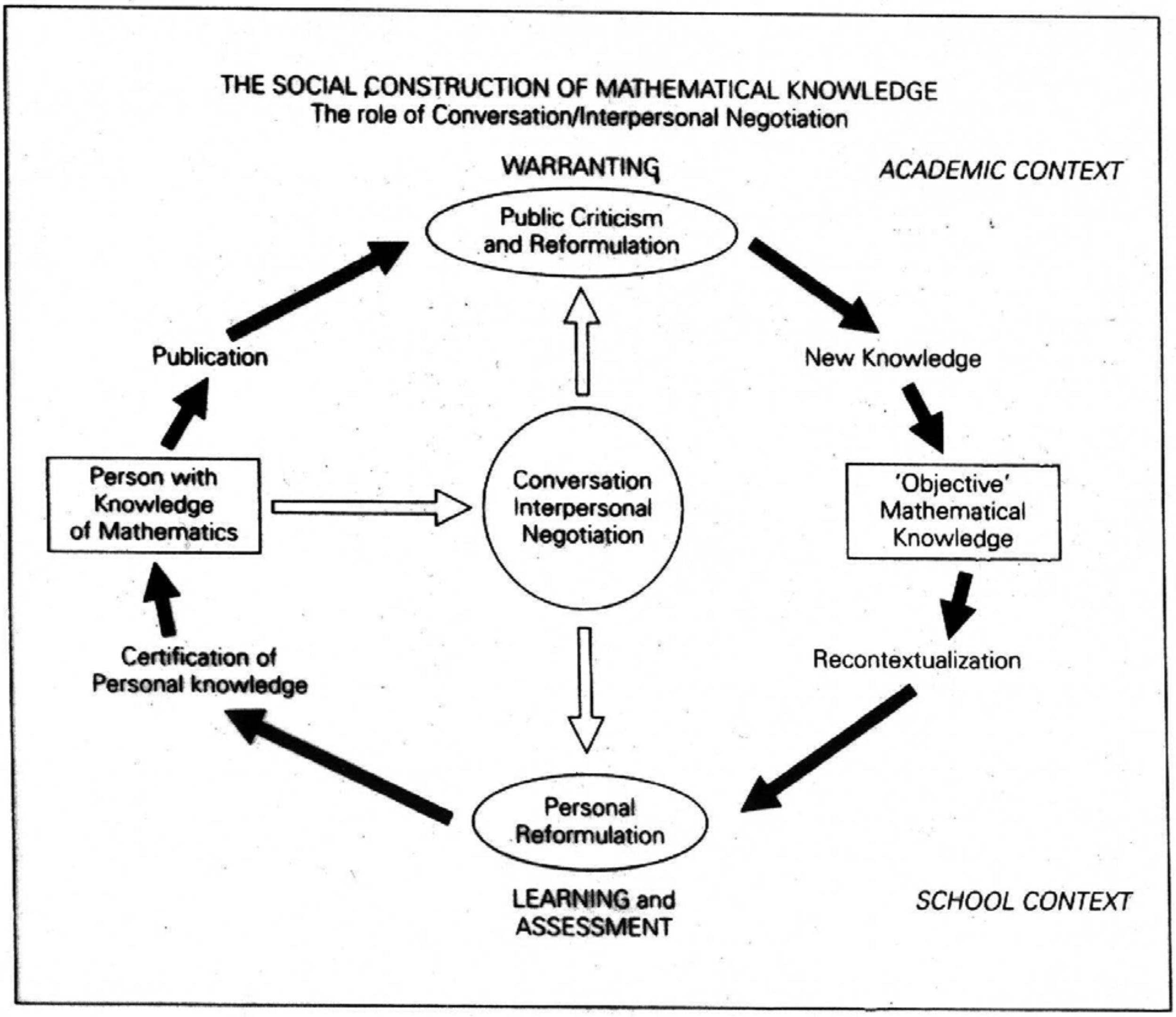

Figure 3.1: The Creative/Reproductive Cycle of Mathematics

De humanistiske matematikfilosofier

Jørgen Ebbesen

Kvasiempirisme, naturalisme, fallibilisme og socialkonstruktivisme.

Disse matematikfilosofiske retninger belyses med udgangspunkt i fx Lakatos, Kitcher, Hersh og Ernest.

$\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ - det lærte, læring, videnskab[1)]

I løbet af 1800-tallet mistede matematikken sin uskyld. Matematikkens ontologi mistede sin a priori karakter: Euklids geometri fik konkurrence af ikke euklidiske geometrier, de reelle tal fik konkurrence af komplekse tal og kvaternioner, og samtidig fik de gode gamle regneoperationer konkurrence fra algebraens kompositioner. Men hvis matematikkens objekter, tallene og formerne, ikke er evigtgyldige, og deres eksistens ikke uafhængig af mennesket, hvad er de så for nogle størrelser? Og hvis matematikken ikke er en empirisk videnskab, som beskriver tallene og formerne, men selv opfinder sine objekter, hvad er matematik så? Og hvad er sandhed? (Der kommer lige lovlig meget elastik i begrebet, når vi selv definerer objekterne). To tusind års ubekymret leg med tal og former blev afløst af selvransagelse[2)].

Den første reaktion var på sæt og vis optimistisk. De tre store grundlagsfilosofier fra starten af det tyvende århundrede: logicismen, formalismen og intuitionismen, har det fælles træk, at vi skal bare lige have fundamentet bragt i orden, så kan vi fortsætte, hvor vi slap. Måske ikke helt på samme måde som før, for erfaringen har lært os, at vi skal være mere forsigtige. Men grundlæggende er matematikkens ontologi stadig a priori given. Vi skal bare forstå denne a priori givne natur lidt bedre. Logicismen tager udgangspunkt i mængdelæren, formalismen i metamatematikken, og intuitionisterne holder det farlige uendelighedsbegreb i strakt arm.

Men disse tre redningsprojekter var ikke uproblematiske set fra et matematikfilosofisk synspunkt. Intuitionismen har det åbenlyse problem, at den får for lidt med: For mange af de sætninger, vi gerne vil have fortsat skal gælde, kan ifølge intuitionisterne ikke bevises. Hvad angår de to andre grundlagsfilosofier, rammer Hersh[3] plet, når han på side160 skriver: *Hilbert's formalism, like logicism, offered certainty and reliability for a price. The logicist would save mathematics by turning it into a tautology. The formalist by turning it into a meaningless game.* Det er jo ikke alle tautologier, der er lige interessante. Matematik går blandt andet ud på at finde de interessante blandt disse, og her lader logicismen os i stikken: Den giver ingen anvisning på, hvordan vi finder dem. Og det er jo ikke ligegyldig, om en matematisk teori handler om det ene eller det andet (der er ikke tale om en gang avanceret ludo), som formalisterne hævder. Hvis man påstår det, ser man både bort fra, hvordan matematikken blev til (og fortsat bliver til), og den ikke uvæsentlige kendsgerning, at matematikken anvendes. Kritikken af de tre grundlagsfilosofier kan sammenfattes til, at de alle tre snarere er præskriptive end deskriptive, og at den beskrivelse, de giver, er mangelfuld.

For at det ikke skal være løgn, slukkede Kurt Gödel (1906-1978) i 1931 definitivt lyset for formalismen med sine ufuldstændighedssætninger (Et aksiomatisk system, som omfatter de naturlige tal, er enten inkonsistent eller for svagt til, at alle sande påstande om de naturlige tal kan udledes fra aksiomerne. Konsistensen af et sådant aksiomatisk system, kan hverken vises eller modbevises inden for systemet).

Vi tager en dyb indånding og fastslår: Det turde være en indlysende kendsgerning, at matematik er resultatet af menneskelig aktivitet[3)]. Med menneskeskabt objekter[4)], som er idealiseringer, generalisationer – i det hele taget ekstrapolationer af den fysiske virkelighed. Den opmærksomme læser vil bemærke, de humanistiske matematikfilosoffer, som vi skal behandle i denne opgave, ikke har levet forgæves. Vi opfatter synspunktet som en selvfølge – som et af de første principper, som vor diskurs tager udgangspunkt i.

Hvilke krav skal vi stille til en matematikfilosofi? Hersh har en liste med tretten punkter, som han diskuterer på side 24-34. Men han ved jo godt, hvad han vil nå frem til. Det er en kendt sag, at eleverne i skolen har en tilbøjelighed til at vælge en metode, der giver det rigtige facit, hvis de får en facitliste. Vi kan godt afsløre med det samme, at vi finder hans 2. krav om forbindelse til naturvidenskabens videnskabsteori (læs: Popper! Læs: Lakatos!) problematisk. Så på bedste kartesiske vis vil vi formulere vore egne krav:

I. Filosofien skal beskrive matematikken, så vi kan genkende den. Filosofien skal være deskriptiv.

II. Filosofien skal give indsigt i matematikkens ontologi. Matematikkens objekter er menneskeskabte. Hvordan skabes objekterne? Hvorfor er de så universelle (uafhængige af individ, tid, sted og kultur), som de – om end menneskeskabte – synes at være?

III. Filosofien skal redegøre for, hvordan vi erkender matematikkens objekter, altså gøre rede for matematikkens epistemologi.

IV. Matematikkens objekter lever tilsyneladende deres eget liv. Vi giver dem liv uden at overskue konsekvenserne. Filosofien skal redegøre for dette "liv", hvordan kommer vi fra de indledende knæbøjninger (små naturlige tal, naiv mængdelære) til de mere komplekse teoridannelser. Filosofien skal redegøre for matematisk intuition.

V. Filosofien skal have et tilfredsstillende sandhedsbegreb. Herunder et bud på, hvorfor der er så høj grad af konsensus om sandheden af matematikkens sætninger.

VI. Filosofien skal give et svar på, hvorfor matematikken er så urimelig god til at beskrive den fysiske virkelighed.

VII. I det omfang filosofien beskæftiger sig med fagets dynamik, skal denne være i overensstemmelse med fagets historiske udvikling.

VIII. Filosofien må ikke være berøringsangst over for matematikken, som den praktiseres i det virkelige liv. Den skal beskæftige sig med vekselvirkningen mellem matematik som social aktivitet (undervisning, forskning) og matematikken som videnskab.

Det er disse krav, vi vil stille ethvert bud på en matematikfilosofi over for. Krav VII-VIII understreger den humanistiske indfaldsvinkel. Vores forventninger er i filosofisk forstand beskedne: Vi er ikke på udkig efter sande svar, men interessante svar. Vi forventer ikke at finde én matematikfilosofi, som giver alle svarene på en gang. Vores grundholdning er måske lidt slatten og præget af den tid, vi lever i (zapper-mentalitet?): Vi vil have frit valg på alle hylder og have lov til at betragte matematikken gennem forskellige optikker. Vi har ingen fine fornemmelser. Hvis sociologien eller psykologien – to fag som filosoffer normalt vrænger på næsen ad – kan bidrage til at give os indsigt i de spørgsmål, vi har stillet, så tager vi det med.

Vi vil bedømme en filosofi på, om den lever op til sin målsætning – altså bedømme den på sine egne præmisser. Hvis den f. eks. argumenterer for sin validitet med henvisning til historien, skal det henvisningen saftsuseme holde.

Vi vil være på vagt over for ad hoc hypoteser og indlysende idiotiske påstande, sagt med andre ord: Vi vil hellere have en ufuldstændig teori, der holder og giver gode svar på udvalgte spørgsmål, end en sammenhængende teori med indlysende svage punkter.

Imre Lakatos (1922-1974) er de humanistiske matematikfilosofiers grundlægger. I *Proofs and Refutations,* Lakatos[6], indførte han kvasiempirismen inspireret af Karl Poppers videnskabsteori for de empiriske videnskaber. Bogen er et opgør med formalismen, som ifølge Lakatos side 1:

..tends to identify mathematics with its formal axiomatic abstraction (and the philosophy of mathematics with metamathematics)..disconnects the history of mathematics from the philosophy of mathematics..

På side 5 formulerer han sin programerklæring:

Its modest aim is to elaborate the point that informal, quasi-empirical, mathematics does not grow through a monotonous increase of the number of indubitably established theorems but through the incessant improvement of guesses by speculation and criticism, by the logic of proofs and refutations.

Og om sin fremstillingsform skriver han:

.. rational reconstructed or 'destilled' history. The real history will chime in the footnotes, most of which are to be taken, therefore, as an organic part of the essay.

Før vi går i flæsket på Lakatos vil vi hylde ham tilbørligt. Hans oprør mod formalismen var startskuddet til et hårdt tiltrængt opgør (med hans egne ord *A challenge is now overdue*) med det, han kalder de dogmatiske matematikfilosofier – de tre store grundlagsfilosofier og platonismen. Lakatos var en sand revolutionær5).

Koetsier[5] indeholder en kritisk historisk gennemgang af Lakatos' rekonstruktion af den historiske udvikling af Eulers polyedersætning, se side 22-50, hvor han påviser, at rekonstruktionen ikke er i overensstemmelse med det faktiske historiske forløb. Lakatos har komprimeret et forløb, der i virkeligheden varede over 100 år, og han bytter om på rækkefølgen af begivenhederne. Hans tolkning er anakronistisk: Han tolker begivenhederne uafhængigt af deres historiske kontekst. Da de hører hjemme i forskellige epoker med direkte modstridende metodik2), er hans fremgangsmåde uacceptabel. Læg dertil hans fejllæsning af en kilde, som han henviser til i en central note6), se Koetsier side 48, og vi må med beklagelse konkludere, at det langt fra er korrekt, når Hersh side 211 skriver: *..footnotes tell the genuine history of the Euler-Descartes conjecture in amazing compelexity.. **Proofs and Refutations** is overwhelming in its historical learning..*

Jamen skal vi da kassere Lakatos' arbejde og hans ideer? Koetsier har et mere konstruktivt forslag: Vi skal opfatte Lakatos' rekonstruktioner som fiktion, *ikke* som historie, og vi skal læse *Proofs and Refutations* som et inspirerende bidrag til studiet af matematikkens metodik. Koetsier skelner mellem svag og stærk fallibilisme. Vi vil bruge betegnelserne fallibilisme og kvasifallibilisme. Fallibilismen er parallellen til Poppers naturvidenskabelige fallibilisme, som indebærer, at en teori i sin helhed i princippet kan forkastes. Ifølge kvasifallibilismen, kan udviklingen føre til utilsigtet nyfortolkning af de oprindelige definitioner med deraf følgende modeksempler, men de ændringer, det afstedkommer, kan beskrives som justeringer og forbedringer af den oprindelige teori, aldrig forkastelse, se Koetsier side 45. Koetsiers tese er, at matematikken er kvasifallibilistisk, og han bruger hovedparten af sin bog på at underbygge denne tese med historiske cases. Han påpeger desuden, at matematikken måske ikke er ufejlbarlig på mikro planet (den enkelte matematiker/inden for en snæver tidsramme), men at makro planet (det matematiske samfund/over længere tid) er kendetegnet ved stor stabilitet og mindre justeringer.

Lad os som et eksempel nævne, at den historiske udvikling af geometrien, som vi beskrev i en tidligere opgave, efter vores opfattelse beskrives langt bedre vha. kvasifallibilisme end den rene vare, fallibilismen.

En berettiget indvending mod kvasifallibilismen er, at definitionen mildest talt er lidt løs. Til gengæld giver den en beskrivelse af matematikken, som vi kan genkende. Endelig er det kvasifallibilisme, Lakatos dokumenterer i *Proofs and Refutations*. Hverken mere eller mindre.

Lakatos flytter fokus fra matematikken, som den præsenteres i lærebøger og videnskabelige artikler, til matematikken, som den udøves. Altså fra slutproduktet til processen. Så langt, så godt. Men det forekommer os, at han ikke blot flytter fokus, men foretager en identifikation, som vi er uenige i. Hans svar på, hvad matematik er, minder i lettere karikeret form om følgende:

Hvad er malerkunst? Jo, maleren maler et udkast, som han korrigerer, ser på det nye resultat og korrigerer dette. Han tilføjer måske en detalje, eller maler dele af det gamle billede over. Og sådan bliver han ved. Se det er malerkunst! Suppleres dette svar med en beskrivelse af, hvordan Monalisa kunne være blevet til, som ikke er i overensstemmelse med, hvad vi ved om maleriets faktiske tilblivelse, så er vi tæt på noget, der ligner *Proofs and refutations*.

Men hvor meget fortæller parodien ovenfor om malerkunst? Og for den skyld maleteknik? Maleriets tilblivelsesproces er ikke uinteressant, og en kunstkritik, der ikke tager hensyn til denne, og som overser, at maleriet er malet af et menneske i en bestemt social og historisk kontekst, risikerer at gå glip af væsentlige pointer. Men det er immervæk maleriet, der bør være i centrum. På samme måde mener vi, at det er slutproduktet, der bør være genstand for matematikkens filosofi.

Vi har forsøgt at læse Lakatos som foreslået af Koetsier, nemlig som en beskrivelse af fagets metodik. Vi indrømmer, at vi kun har skimmet *Proofs and refutations*, men vor umiddelbare dom er, at som metodisk studie, er bogen ikke sensationel. Havde bogen heddet *Conjectures and refutations*, tror vi, at de fleste matematikere kunne nikke genkendende til Lakatos' rationale rekonstruktioner. Men det er vigtigt for Lakatos, at det er de færdige sætninger, der er forkerte – det *er* fallibilisme, der er hans ærinde. Han vil indføre kvasiempirismen som en parallel til Poppers naturvidenskabelige metode, og er derfor nødt til at gøre matematik til et eksperimentelt fag ved at identificere matematik med det, han kalder uformel matematik (en præcis definition af begrebet havde været ønskelig), og han skal bruge sætningerne som potentielle falsifikatorer. I sin iver for at introducere Poppers metode til matematikken må Lakatos efter vor opfattelse slå knuder på sig selv.

Hvorfor denne iver? Matematik adskiller sig fra de empiriske fag ved, at resultaterne ikke skal stemme overens med den fysiske virkelighed. Det giver matematikken en ekstra frihedsgrad i forhold de empiriske fag, som er bundet fast i begge ender. Af de første principper i den ene ende og virkeligheden i den anden. Båndet til virkeligheden fører til Poppers i vore øjne lidet attraktivt falsificeringskriterium. Da en empirisk teori skal stemme overens med virkeligheden (det er *ikke* nok, at den er logisk), og man som bekendt aldrig ikke kan føre bevis vha. eksempler, kan den ikke verificeres, men kun falsificeres. Er det virkelig værd at overtage dette kriterium? Det er da om at udnytte den ekstra frihedsgrad. For eksempel til at tage udgangspunkt i indlysende første principper og se, hvor det fører en hen.

For at opsummere kritikken: Vi genkender dårligt Lakatos' beskrivelse af matematikken. ***Incessant*** *improvement of guesses* er en overdramatisering, som der ikke er belæg for i historien. Han har ikke noget bud på matematikkens universelle træk og den høje grad af konsensus – tværtimod, det beror på en illusion! Hvilket klarsyn! Til sidst skal det nævnes, at ontologien glimrer ved sit fravær.

Så har vi langt større sympati for Philip Kitchers (1947-) naturalisme, om end vi kun bygger vort indtryk på Hersh side 223-225. Kitchers synspunkt (i Hersh' gengivelse), *the formula* $2+2=4$ *can be proved as a theorem in a formal axiomatic system, but it derives its force and conviction from its physical model of collecting coins or pebbles* har vi stor forståelse for. Hvor meget fordelagtigt man end kan sige om den deduktive metode, så er det en empirisk kendsgerning, at intuitionen om de små tal kommer før aksiomsystemerne – både i den historisk udvikling og i det enkelte individs udvikling. Den deduktive metode kan bruges som overbygning på de grundlæggende begreber og til at rydde op (sikre mod fejl), men en ontologi baseret på den deduktive metode, er efter vor opfattelse forfejlet, idet den afskærer matematikken fra sine rødder.

Paul Ernest (1950-) indførte socialkonstruktivismen i matematikfilosofien. Han formulerer sin Credo i det korte, læsevenlige og læseværdige kampskrift *Social constructivism as a Philosophy of Mathematics: Radical Constructivism rehabilitated?*, Ernest[2] .

a. *knowledge is not passively received but actively built up by the cognizing subject;*

b. *the function of cognition is adaptive and serves the organization of the experiential world, not the discovery of ontological reality.*

With the added assumptions of the existence of social and physical reality I can extend these principles to elaborate the epistemological basis of social constructivism.

c. *the personal theories which result from the organization of the experiential world must 'fit' the constraints imposed by physical and social reality;*

d. *they achieve this by a cycle of theory-prediction-test-failure-accommodation-new theory;*

e. *this gives rise to socially agreed theories of the world and social patterns and rules of language use;*

f. *mathematics is the theory of form and structure that arises within language.*

Vi er kun delvis enige med Ernest, idet vi finder det påfaldende, at den psykologiske virkelighed kun optræder implicit. Vi havde gerne set, at indskuddet havde lydt: With the added assumptions of the existence of social, physical and *psychological* reality.. og punkt c. erstattet med:

c'. the personal theories which result from the organization of the experiential world must 'fit' the constraints imposed by physical, social and *psychological* reality;

Vi anser den subjektive psykologiske virkelighed for sine qua non. Den fysiske virkelighed er efter vores opfattelse en abstraktion: Om sommeren, når vi vandrer, er vores rygsæk tungere om aftenen end om morgenen, endskønt vi har drukket de tre liter vand, vi tog med fra starten – det er den pinefulde virkelighed. Vi kan *tænke* os til, at rygsækken vejer tre kilogram mindre i den fysiske virkelighed. Vi erkender, at den fysiske virkelighed eksister, men den er ikke mindre abstrakt end tallene og formerne. Den måde forestillingen om den fysiske virkelighed opstår i individets bevidsthed på, kan godt minde om tilblivelsen af de subjektive matematiske objekter.

Succes eller fiasko testen i cyklen *theory-prediction-test-failure-accommodation-new theory* er ikke udelukkende relativt den fysiske virkelighed (f.eks. holder man balancen, eller falder man og slår sig?) eller relativt den sociale verden (f.eks. får man ros eller skæld ud?). Den ultimative succes for individet er på det psykologiske plan: Virker skemaet, eller gør det ikke? Det lærende individ gør den erfaring, at gamle skemaer kan erstattes med nye og bedre skemaer, f.eks. ved udvidelse eller indskrænkning af et skemas gyldighedsområde. Vi vil påstå, at denne erfaring er langt mere reel for individet end erfaringerne fra den fysiske og sociale verden.

Nu vi er ved det, vover vi det ene øje og påstår, at matematikkens objekter, som vi naivt har betegnet som idealiseringer, generalisationer og ekstrapolationer, ikke er idealiserede abstraktioner hævet over mennesket, men derimod er psykologiske realiteter. Vor naive betegnelse dækker jo over succesfulde læringsstrategier, som det lærende individ har erfaret virker. Vor tese er, at matematik er intimt koblet til metalæring. Vi er f.eks. mere tilbøjelige til at tilskrive den naive forestilling om de naturlige tal: ”og sådan kan man blive ved og ved og ved ..” til individets metalæring end til fysiske eller sociale erfaringer. Det samme gælder den naive beskrivelse af geometriens objekter. Hvis vore vage forestillinger holder stik, kan de være med til at forklare universaliteten af matematikken. Vi har godt nok individualiseret matematikkens objekter, men samtidig koblet dem til forudsætningen for læring. Hvis man overhovedet er i stand til at lære noget som helst, følger (dele af) matematikken med.

Om end vi finder tanken om matematik som sprog (i ordets videste betydning) perspektivrig, kan vi ikke tilslutte os formuleringen *within language* i punkt f. Individets erfaringer med skemaer (læs: individets første matematiske erfaringer) går lige som individets følelser forud for tilegnelsen af sproget. Matematik er ikke indlejret i det naturlige sprog, men er et særligt sprogligt register[7)].

Er vore tanker den rene ammestuesnak? Måske, men vi ser en antydning af, at der måske er noget om snakken, i at den dynamik, som Koetsier mener driver matematikkens udvikling på makro niveauet – kvasifallibilismen – minder meget om dynamoen i individets læring.

Selv om vi ikke skulle have fundet de vises sten, mener vi, at udeladelsen af den psykologiske virkelighed i Ernest's forudsætninger er betænkelig. Han er på dette punkt lige så præskriptiv i sin filosofi, som de dogmatiske matematikfilosofier (absolutismen med Ernest's betegnelse), han gør oprør imod. På side 2 skriver han:

..In contrast, conceptual change philosophies assert that mathematics is corrigible, fallible and a changing social product. This second claim is shocking, for mathematics is seen by many to be the last bastion of certainty. Perhaps the most important statement of this claim is to be found in Lakatos (1976)..

Henvisningen er naturligvis til *Proofs and refutations*. For vort vedkommende er vi ikke chokerede. Vi giver gerne afkald på absolut sikkerhed, hvis vi til gengæld får en genkendelig beskrivelse af matematikken. Det er som talt ud af vores mund, når han på side 3 skriver:

Disposing of absolutism is all very well, but a replacement philosophy must account for the unique features of mathematical knowledge. In particular: How to account for the apparent certainty and objectivity of mathematical knowledge? How, in Wigner's phrase to account for 'the unreasonable effictiveness of mathematics' in describing the world, and indeed via science, in giving us an unparalleled power over the natural world?

Ernest's svarer på det første spørgsmål med Wittgensteins ord: *Mathematical certainty rests on socially accepted rules of discourse embedded in our 'forms of life'*. Vi er, som det allerede er fremgået, ikke enige. Men selv om vi skulle tage fejl, har Ernest stadig et forklaringsproblem. Nemlig: Hvorfor adskiller matematikken sig fra andre sociale konstruktioner på dette punkt? Hans forklaring på side 4 er mildest talt tyndbenet.

Ernest's svar på det andet spørgsmål er: *It's built in. It derives from the empirical and linguistic origins and functions of mathematics*. Eller med Reuben Hersh (1927-)'s ord: *Our mathematical ideas fit the world for the same reason that our lungs are suited for the atmosphere of this planet.*

Vi er ikke enige. Vi laver tallene for at tælle vores geder for at se, om de er der alle sammen. I sit udspring er matematikken knyttet til omgivelserne. Vi indrømmer blankt, at den fysiske og sociale verden har stor indflydelse på matematikkens videre udvikling: Vi laver regneoperationerne for at holde styr på økonomien, når vi sælger gederne. Vi laver geometrien for at holde styr på jordarealerne efter oversvømmelse. Vi laver infinitesimalregning for at beskrive dynamik, osv. Men matematikken har et indre liv, som Ernest og Hersh får svært ved at forklare. Hvordan kan matematikken være forud for virkeligheden? Historien rummer talrige eksempler på, at unyttig matematik udviklet for sin egen skyld siden har fundet anvendelse. Og matematik udviklet til ét formål finder anvendelse til noget helt andet. Traditionen med at konfrontere matematikken og den fysiske virkelighed er i øvrigt ganske ny – den startede med Gallilei. Hvis man går ind på vore ideer og parafraserer Hersh: *Our mathematical ideas fit the psychological world for the same reason that our lungs are suited for the atmosphere of this planet*, er forklaringen derimod enkel: Den virkelighed, matematikken beskriver så bemærkelsesværdigt smukt, er vores *tolkning* af omgivelserne. En tolkning som er underlagt de samme betingelser som vores matematiske begrebsdannelse.

Hvis det ikke er fremgået tydeligt nok – vi har fokuseret på kritikpunkterne – skal det afslutningsvis fremhæves, at vi finder de humanistiske matematikfilosoffer så spændende, at vi er fulgt i deres fodspor (Ernest indtager hæderspladsen på forsiden). Om end vi ikke kan følge dem hele vejen. Vi vil ikke gå med til at erstatte sandhed med konvention og konsensus, det er for nemt![9)] Individet har sine egne sandhedsbgreber, som godt nok afstemmes med samfundets, men som også indeholder interne elementer baseret på individets erfaringer.

Begreberne sandt og falsk er generalisationer og idealiseringer.. Nå, vi gentager os selv. Afstemningen med samfundet beror ikke kun på konvention og gruppepres, men for matematiks vedkommende i langt højere grad på rationel argumentation, som udsætter individets skemaer for udfordringer, som enten afvises eller fører til omstrukturering af skemaerne. Matematiske beviser er destilleret rationel argumentation8). Hvis man forstår beviserne, kan man internalisere sætningerne (læs: inddrage dem i sine skemaer), og de bliver subjektivt sande. Her er nøglen til den store konsensus om matematisk sandhed: Kritisk bevislæsning. Det matematiske sproglige register er udviklet til dette formål – vi vil især fremhæve, at den matematiske diskurs er entydig og eksplicit (ingen skjulte ydre referencer). Det er lettere at påvise fejl i argumentationen i dette særlige sproglige register end i naturligt sprog. Man kan derfor føle sig så meget desto mere overbevist om rigtigheden. Man kan af gode grunde ikke gøre hele matematikken intern på denne måde, men er nødt til stole på, at andre er gået argumenterne kritisk igennem. Dette er et spørgsmål om tillid, og det er klart, at man kan blive narret. Når vi i den grad opponerer mod Lakatos og Ernest, skyldes det, at de begge ophøjer undtagelsen, der i vore øjne bekræfter reglen, til regel.

Hersh's og Ernest's politiske betragtninger, se Hersh side 229 og 238-246, skal vi afslutningsvis placere et sted mellem det rablende og det rablende sindsyge.

1)
Ifølge Artmann[1] side 15 (vedlagt som bilag) blev ordet først brugt i denne betydning af Platon og muligvis pythagoræerne. Det tilsvarende verbum er manthanein – at lære.

2)
Kline[4] skriver på side1024: *Beyond its achievements in subject matter, the nineteenth century reintroduced rigorous proof. No matter what individual mathematicians may have thought about the soundness of their results, the fact is that from about 200 B.C. to about 1870 almost all of mathematics rested on an empirical and pragmatic basis. The concept of deductive proof from explicit axioms had been lost sight of. It is one of the astonishing revelations of the history of mathematics that this ideal of the subject was, in effect, ignored during the two thousand years in which its content expanded so extensively.*

Kline fortsætter på side 1025: *Not only did this destroy the very notion of the self-evidency of axioms and their too-superficial acceptance, but the work revealed inadequacies in proofs that had been regarded as the soundest in all of mathematics. The mathematicians realized that they had been gullible and had relied on intuition.*

3)
Nogle filosoffer går et skridt videre: Matematik *er* en menneskelig aktivitet. Det er vigtigt at gøre sig klart, at matematik er mange ting. Efter sigende var Gauss den sidste allround matematiker, der havde overblik over alle matematikkens discipliner, så selv set fra en snæver faglig synsvinkel er matematik mange fagområder. Med forskellige traditioner, forskningsmiljøer, didaktiske traditioner, fagpolitiske holdninger. Men den side af sagen er jo trivielt et menneskeligt anliggende. Det interessante spørgsmål er, i hvilket omfang de sociale aspekter afspejles i faget selv.

4)
Det er nok her, vandene skilles. Vi anerkender ikke eksistensen af abstrakte objekter uafhængigt af mennesket. Synspunktet forekommer os temmeligt X-Files-agtigt – there's something out there! Det er skæbnens ironi, at de, der tror på eksistensen af abstrakte objekter, kalder sig for realister.

5)
Med den revolutionæres karakteristika:

- han havde noget at gøre oprør imod,
- endskønt erklæret skeptiker, erstatter han blot gamle dogmer med nye, nemlig *Proofs and refutations*,
- han forblændede af sine tilhængere.

6)
(Lakatos side 87) ..This important characteristic of concept-stretching explains why respectful historians, because they do not understand that concepts **grow**, create for themselves a maze of problems.

7)
Vi er inspireret af Winsløw[7].

8)
Der er mange lighedspunkter med mere velkendte destillater: Man kan blive beruset ved indtagelsen. Destillatet kan have den lifligste smag af blomme, pære, æble osv., hvis man er heldig. Hvis man er uheldig, er det spritten i smagen.

9)

Og forkert! Det gør begrebet meningsløst. Set i lyset af vore betragtninger om virkelighedens abstrakte natur har det absurde (er det sandt, at der har været mennesker på månen?) og skræmmende konsekvenser (er det sandt, at der har fundet jødeudryddelser sted?).

[1] Artman, Benno (1999): *Euclid – the Creation of Mathematics*, Springer.
[2] Ernest, Paul (udateret): *Social constructivism as a Philosophy of Mathematics: Radical Constructivism rehabilitated?*, www.ex.ac.uk/~PErnest/soccon.htm (vedlagt som bilag)
[3] Hersh, Reuben (1998): *What is Mathematics, Really?*,Vintage.
[4] Kline, Morris (1990): Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press.
[5] Koetsier, Teun (1991): *Lakatos' Philosopy of Mathematics: A Historical Approach*, North-Holland.
[6] Lakatos, Imre (1976): *Proofs and refutations*, Cambridge University Press. Manuskriptet havde cirkuleret som preprint i 15 år inden udgivelsen.
[7] Winsløv, Carl (1998): *Matematikkens sproglighed som didaktisk potentiale*, Nordisk matematik didaktik, 6 no. 2, p 29-40.

Forsidebilledet er fra Ernest, Paul (1994): *The Dialogical Nature of Mathematics*, i *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (red Ernest, Paul), Falmer Press.