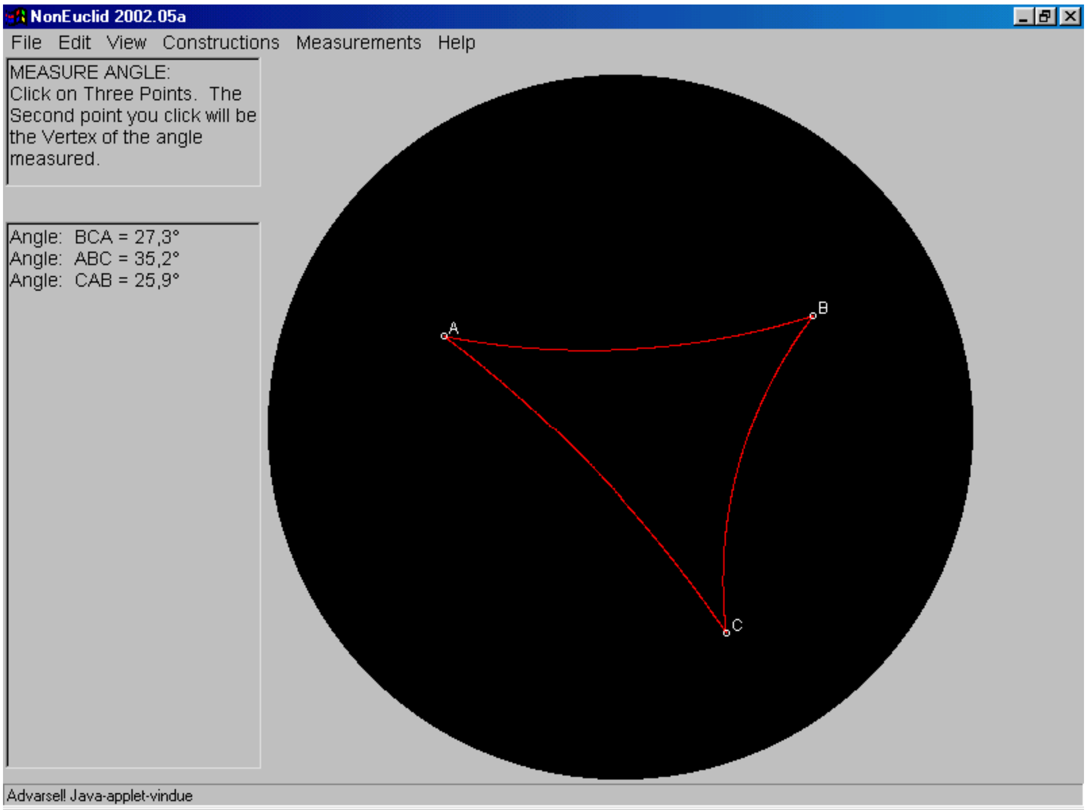


Geometri og grundlag

Jørgen Ebbesen

Geometri og grundlag: Euklid, Descartes, Bolyai/Lobachevsky, Hilbert.

Emnet er stort, men her ønskes en kort systematisk præsentation af de nævnte matematikeres bidrag, disses indbyrdes relationer og filosofiske betydning.

Der findes ingen kongevej til geometrien, Euklid ca. 300 f.v.t.

Ifølge Proklos levede Euklid omkring 300 f.v.t., og vi er nogenlunde sikre på, at han var den første matematikprofessor på universitetet i Alexandria. Han skrev mindst 10 værker om matematik, men det er for sine *Elementer* – det betyder noget i retning af hovedsætningerne – han huskes. Dette hovedværk og mønstereksempel på anvendelse af den deduktive metode, som udvikledes i det antikke Grækenland i perioden 600-300, har inspireret generationer af videnskabsmænd. På det mere beskedne plan, skal det nævnes, at opgaveforfatteren så sent som i 1970 fik sin logiske grundtræning i realskolen i en geometriundervisning baseret på Euklid. Andre forfattere havde skrevet værker om geometriens elementer før Euklid. Den første, som Proklos har kendskab til er, Hippokrates fra Chios, som skrev sine "Elementer" omkring 430 f.v.t.

Elementerne består af 13 bøger. Vi vil udelukkende beskæftige os med Bog 1, som indledes med grundprincipperne i form af 23 definitioner, 5 postulater og 5 aksiomer. Euklid følger den aristoteliske model for den deduktive metode. Bemærk, at Aristoteles og Euklid skelner mellem aksiomer (af generel karakter) og postulater (som er emnespecifikke), hvor vi i dag bruger fællesbetegnelsen aksiomer.

Kun nogle få ord om Euklids definitioner. Set fra et moderne synspunkt, kan de forekomme lidt naive. Det er f.eks. håbløst at definere objekterne punkt og linje vha. egenskaber, som de *ikke* har. Det er i det hele taget et dødfødt projekt at ville definere alle geometriens objekter. Enhver logisk diskurs må tage udgangspunkt i en række grundlæggende begreber, som ikke skal (kan) defineres, se Eves side 41. På den anden side er det værd at bemærke, at Euklid ikke benytter egenskaberne i definitionerne i sin deduktion. Vi kan altså opfatte definitionernes formelt set tvivlsomme indhold som en visualisering af hensyn til læseren.

De tre første postulater udgør spillereglerne for den klassiske konstruktion med passer og lineal. Det fjerde postulat kunne have været et sætning. Men det femte postulat sammenligner en vinkelsum med summen af to rette vinkler, og så er det jo meget rart at vide, hvad man taler om.

Det femte af Euklids postulater, parallelaksiomet, adskiller sig fra de andre. Det ligner mere en sætning end et aksiom. Mere præcist den modsatte sætning af I-17. Det er bemærkelsesværdigt, at Euklid beviser de første 28 sætninger uden brug af parallelaksiomet – f.eks. er I-16 en trivialitet, hvis man har parallelaksiomet og dermed I-32 (vinkelsummen i en trekant er 180^{o}) til rådighed. Det kunne se ud som om, at det femte postulat er kommet til efter de andre; at Euklid har tilføjet det, fordi han ikke kunne komme videre uden.

Det blev derfor en udfordring for matematikere i mere end 2.000 år at bevise parallelaksiomet ud fra de øvrige aksiomer og I 1-28. Og det er lykkedes dem – udi egen overbevisning! Allerede Ptolemæus (ham med Almagesten) forsøgte sig. Proklos påviste fejlen og gav til gengæld sit eget bevis. Som naturligvis – ved vi i dag – var forkert.

Denne særlige disciplin – at bevise parallelaksiomet – har været en lang opvisning i besnærende fejltagelser. Aktørerne har enten gjort antagelser, som de har anset for indlysende, men som siden har vist sig at være ækvivalente med parallelaksiomet. Eller de har stiltiende gjort antagelser, der ikke var belæg for i aksiomerne.

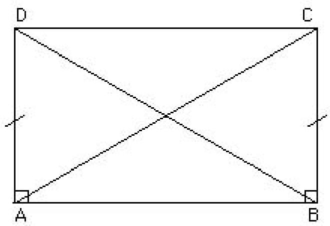
Euklid lægger flot ud ved at forbryde sig i beviset for sin allerførste sætning, I-1 (konstruktionen af den ligesidede trekant), se Eves side 38-39. Det er det sædvanlige problem med et aksiomatisk system, der modellerer virkeligheden: Vi fristes til at drage slutninger med udgangspunkt i virkeligheden i stedet for aksiomerne. De to cirkler, der indgår i konstruktionen, kan ikke sluttes at skære hinanden, med mindre vi udvider aksiomssystemet. Et lignende problem angående skæring (denne gang mellem linjer) opstår beviset for I-21.

Euklid antager stiltiende, at den rette linje, der optræder i det andet postulat, er ubegrænset. Men strengt taget kunne linjen, som fremkommer ved forlængelsen af linjestykket, jo godt bide sig selv i halen. Euklids bevis for f.eks. I-16 er derfor ikke helt fint i kanten, se Eves side 39[1)].

Vort ærinde er ikke at forklejne Euklid og alle dem, der dummede sig ved at bevise parallelaksiomet, men at påvise, at det billede, som mange – også matematikere – har af matematikken som evigyldig og hævet over mennesket, er i strid med den historiske udvikling af faget. I et par tusind år var Euklids *Elementer* det fuldkomne eksempel på den deduktive metode, hvor man udleder sine resultater ved hjælp af logikkens generelle slutningsregler og teoridannelsens aksiomsystem – og kun det ! I dag opfatter vi Euklids aksiomsystem som mangelfuldt !

I den lange række af matematikere, der forsøgte at bevise parallelaksiomet, vil vi fremhæve en enkelt, italieneren Saccheri (1667-1733). Han var snublende nær ved at grundlægge den ikke-euklidiske geometri. Hvilken indflydelse, han rent faktisk havde på udviklingen, er svært at afgøre, for ifølge Eves blev hans afhandling fra 1733 væk !

Saccheri havde som livslangt projekt at bevise parallelaksiomet ved *reductio ad absurdo*-argumenter (Antag, at parallelaksiomet ikke er opfyldt, og udled noget oplagt nonsens som konsekvens heraf. Så *må* parallelaksiomet være opfyldt). Ifølge Eves var Saccheri tilsyneladende den første, der undersøgte konsekvenserne af negationen af Euklids 5. postulat. Han så på firkanter med rette vinkler ved grundlinjen og lige store modstående sider vinkelret på grundlinjen, se figuren nedenfor.



De to vinkler foroven $\measuredangle$ ADC og $\measuredangle$ ABC er ens (overvej !), og der er nu tre muligheder:

1) De er begge spidse
2) De er begge rette
3) De er begge stumpe

Saccheri udelukkede mulighed 3) ved et bevis, hvor han implicit benyttede, at den rette linie er ubegrænset – den fælde var mange faldet i før ham[1)]. Mulighed 1) udelukkede han ved at føre påstanden til en modstrid så langt ude, at Eves betvivler, at Saccheri selv troede på det.

Hvorfor var det så svært for Saccheri at tage konsekvensen af sine egne resultater ? Hvorfor skulle der totusind års forgæves forsøg på at bevise parallelaksiomet til, før der var nogen, der problematiserede det. Hvorfor skulle der gå to tusind år, før man fik blikket op for så åbenlyse mangler, som dem vi påpegede ovenfor ? Det er svært at forstå set i bagklogskabens ulideligt klare lys, at den matematiske platonisme har været så fastgroet, at Euklids geometri ikke var til debat. Den var så indlysende sand, at Descartes brugte den til at bevise Guds eksistens. Euklids I-32 (vinkelsummen i en trekant er 180^{o}) var Spinozas ultimative sandhed. Og Kant baserede sin syntese a priori teori på Euklids geometri.

På den baggrund forstår man bedre ungareren Janos Bolyai (1802-1860), som i et brev til sin fader i 1823 skrev: *"Ud af intet har jeg skabt en mærkelig ny verden"*. Det kan diskuteres, om Johan Bolyai havde *skabt* en ny verden, for hans arbejde (der blev trykt som et 26-siders appendiks til en bog, faderen udgav i 1831) indeholdt intet bevis for eksistensen af geometrien. Men han havde det mod, der skulle til for at bryde med vanetænkningen.

Faderen forelagde Gauss sin søns resultater. Gauss svarede: "Wenn ich damit anfange, "dass ich solche nicht loben darf", so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen, aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben.." (Læs selv videre i Mejlbo[9] appendiks 3). Gauss fortsætter med at fortælle, at han har været optaget af de samme ideer som Janos Bolyai i 39 år, at han ikke har skrevet meget ned, men at han havde tænkt sig at nedfælde tankerne til udgivelse efter sin død. Hvorfor vente ? Det menes, at Gauss ikke ønskede at tage opgøret med den fremherskende Kantisme. Som et kuriosum kan nævnes, at Janos Bolyai aldrig tilgav Gauss det omtalte brev, selv om det må siges at være rosende – trods indledningen.

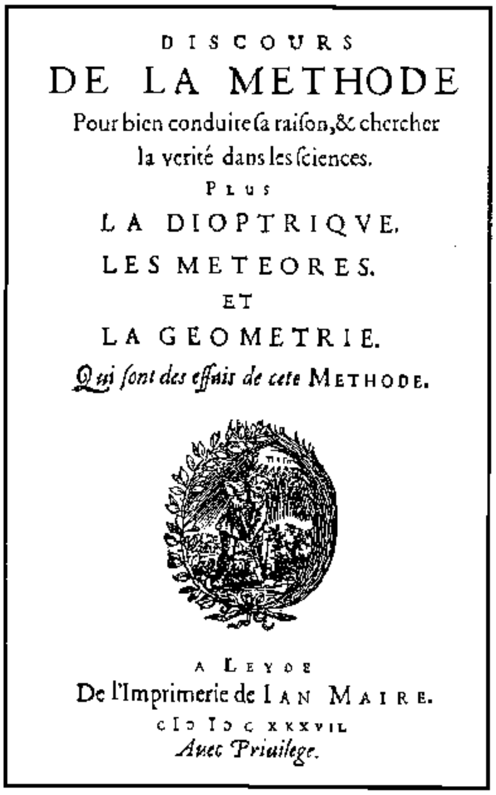
Uafhængigt af Janos Bolyai havde russeren Nicolai Ivanovitch Lobachevski (1793-1856) i 1826 holdt en forelæsning på universitetet i Kazan, hvor han skitserede en geometri, hvor der gennem et givent punkt var flere linjer parallelle med en given linje, se Katz[7] side 699. En bearbejdet og udvidet udgave af forelæsningsnoterne udkom tre år senere i *Kazan Bulletin*. Lige som Bolyai gav Lobachevski ikke noget bevis for eksistensen af sin geometri.

Fauvel & Gray omtaler på side 529 det videnskabelige samfunds umiddelbare reaktion på Bolyais og Lobachevskis arbejde som *malign neglect* (ondartet ligegyldighed). Der gik omkring 30 år, før ideerne blev udbredt til en større kreds. Hvorfor så lang tid ? Sprogbarrieren er en oplagt forklaring. Bolyai og Lobachevski var to ukendte navne i Vesteuropa, så det tog tid før deres arbejde blev kendt (Lobachevski udgav bøger på tysk i 1840 og på fransk i 1855). En anden forklaring er det manglende eksistensbevis. Lidt i samme boldgade mangler både Bolyai og Lobachevski et bevis for konsistensen af deres geometrier. En forståelig model for geometrien havde været et forbandet godt argument over for den Kant-inspirerede samtid. Italieneren Eugenio Beltrami (1835-1900) konstruerede i 1868 en sådan model, hvor de rette linjer var geodæterne på pseudosfæren, som udgjorde planen i geometrien, se Eves side 66-67. Siden er der fremkommet mange andre modeller. Vi vil fremhæve en særlig smuk og enkel model fra 1887 af franskmanden Henri Poincaré (1854-1912), se forsiden – billedet er klikbart ! Eves har en forholdsvis fyldig gennemgang af modellen på side 88-92, men vi foretrækker så ganske afgjort gennemgangen i Lundsgaard Hansen[8] 2). Da modellen er indlejret i den euklidiske geometri, er den ikke-euklidiske geometri konsistent (under forudsætning af, at den euklidiske geometri er det).

Hvad betød opdagelsen af de ikke-euklidiske geometrier for matematikkens filosofi ? Den betød først og fremmest, at Kant tog fejl. Der findes *ikke* nogen naturlig geometri a priori. Set fra et matematisk synspunkt er den euklidiske og den ikke-euklidiske geometri lige gode. Hvis vi skulle give den ene geometri en fortrinsstilling i forhold til den anden, skulle det være, fordi den var bedre til at beskrive den fysiske verden. Det må komme an på en prøve. Problemet er blot, at geometrierne lokalt er ens. Så for at afgøre, hvilken geometri, der beskriver naturen bedst, skal der foretages storskalamålinger, der ifølge Eves side 69 er behæftet med større måleunøjagtighed end den forventelige forskel. Da man således ikke eksperimentelt har kunnet påvise en trekant med en vinkelsum, der afviger fra 180^o, kan vi lige så godt blive ved med at bruge den euklidiske geometri. Af bekvemmelighedsgrunde! Hvilken deroute for den euklidiske geometri: Fra at være *en sand geometri fra evighed til evighed*, er den blevet til en valgmulighed blandt mange. Det rejser en byge af spørgsmål. Fra at være a priori given bliver geometrien en menneskelig konstruktion, og geometriens objekter mister deres selvindlysende status. Hvad er så deres natur, og hvorledes erkendes de ? I kølvandet på denne udvikling bliver en kritisk gennemgang af aksiomsystemet nødvendigt, og et nyt spørgsmål dukker op, nemlig spørgsmålet om konsistens. Spørgsmålet var ikke på tale, den gang den euklidiske geometri var given a priori.3) Kravet om konsistens, som kan forekomme beskedent sammenlignet med sandheden, skulle vise sig at være en bombe under matematikken med vidtrækkende konsekvenser for fagets filosofi.

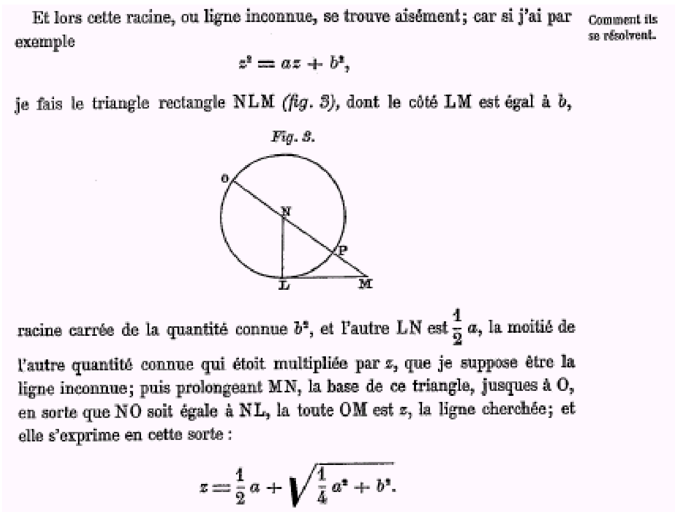
Den interesserede læser kan finde Bolyais og Lobachevskis originale arbejder som appendiks i Bonola [1] . Ved læsningen slår det en, at Bolyai og Lobachevski ikke kun skal have ros for modet til at bryde med parallelaksiomet – de har også indført en ny metode. Undervejs i artiklerne forlader de begge de sædvanlige geometriske konstruktioner til fordel for betragtninger af mere funktionsteoretisk karakter. Det er et skridt, der peger fremad i retning af differentialgometrien (og desuden i retning af konkrete modeller for ikke-euklidiske geometrier), men som også peger bagud til den analytiske geometri. Så vi skruer tiden et par hundrede år tilbage.

Formodentlig under indtryk af $\sqrt{2}$ - katastrofen havde grækerne adskilt geometrien og aritmetikken – opdelingen er tydelig i kapitelinddelingen i Euklids *Elementer*. Denne adskillelse af de to matematiske discipliner fortsatte op i gennem tiden. Men i *La Géométrie*, som René Descartes (1596-1650) udgav sammen med sit filosofiske hovedværk *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercer la vérité dans les sciences* i 1637, genforenes de to grene af matematikken i *den analytiske geometri* (analytisk i modsætning til den syntetiske: konstruktion med passer og lineal). Hersh[6] hudfletter på side 112-114 Descartes for ikke at leve op til sin erklærede metode i *La Géométrie*. Det er da også bemærkelsesværdigt, at filosoffen Descartes advokerer for en metode, som ligger naturligt i forlængelse af den induktive metode, hvorimod matematikeren er en praktisk problemløser, som ikke skeler til aksiomer, og hvad deraf føler. Havde han så endda adskilt de to udgivelser.


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher
la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Avec Privilege.

I *La Géometrie* benytter Descartes geometriske metoder til konstruktion af løsningen på algebraiske ligninger et ofte citeret eksempel, ses på figuren nedenfor, klippet fra side 5 i Descartes[3].


Et lors cette racine, ou ligne inconnue, se trouve aisément; car si j'ai par exemple

Comment ils se résolvent.

$$z^2 = az + b^2,$$

je fais le triangle rectangle NLM (*fig. 3*), dont le côté LM est égal à b,

Fig. 3.

racine carrée de la quantité connue b^2, et l'autre LN est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue qui étoit multipliée par z, que je suppose être la ligne inconnue; puis prolongeant MN, la base de ce triangle, jusques à O, en sorte que NO soit égale à NL, la toute OM est z, la ligne cherchée; et elle s'exprime en cette sorte :

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}.$$

På side 113 skriver Hersh: *Nowhere in Descartes book do we see these familiar horizontal and vertical axes! Boyer says it was Newton who first used orthogonal coordinate axes in analytic geometry*. Descartes er godt nok tæt på i figuren ovenfor, men Hersh har ret! Læseren opfordres til at tjekke selv ved at bladre i den vedlagte elektroniske udgave af bogen[3)].

Vi vil desuden fremhæve Pierre Fermats (1601-1665). Han har, hvad angår faderskabet til den analytiske geometri, stået i skyggen af Descartes. Det skyldes, at hans arbejde først blev trykt i 1679. Men ifølge Brassinne[2] [4)] side 3 fremgår det af Fermats breve, at han havde udviklet hele sit analyseapparat senest i 1636. Og ifølge Katz side 399 vakte nyheden om Fermats arbejde røre, da den nåede Paris i 1636. Det forekommer derfor ubeføjet, når Mejlbo på side 7 i bog 5 skriver: *Her kan vi endda overstå Fermat ret hurtigt. Han var måske nok den første, men da hans værker først blev kendte efter hans død, så har han næppe haft nogen større indflydelse.*

Ud fra Planche 1 hos Brassinne, se appendiks A, skulle vi mene, at æren for koordinatsystemets opfindelse retteligen bør tilfalde Fermat.[5)]

Takket være den algebraisering af geometrien, som Descartes og Fermat stod faddere til, fik linjen og cirklen de ligninger, som enhver gymnasieelev kender i dag. Den analytiske geometri åbnede for anvendelsen af andre matematiske discipliner i geometrien. Er det for store ord, hvis vi påstår, at den analytiske geometri åbnede en kongevej til geometrien ? Som vi skal se, leverede den analytiske geometri samtidig råmaterialet til den endelige cementering af den euklidiske geometris aksiomatiske grundlag i form af linjens ligning.

Efter sammenbruddet af parallelaksiomet med indførelsen af den ikke-euklidiske geometri i midten af det nittende århundrede skærpedes opmærksomheden på geometriens grundlag. Vi tager os den frihed at springe direkte frem til David Hilbert (1862-1943), som i *Grundlagen der Geometrie* fra 1899 præsenterede et konsistent aksiomsystem (under forudsætning af konsistens af de reelle tal) og en model for den plane geometri, se side 83-86 i Eves. Læg mærke til aksiomerne II-1 og II-3, de imødegår vore indvendinger tidligere i opgaven. Modellen står omtalt i Eves side 94-96. Ifølge gængs praksis *har* et punkt et koordinatsæt, og en linje *har* en ligning på baggrund af den euklidiske geometri. Hilbert vender tingene på hovedet: Hos Hilbert *er* et punkt et koordinatsæt, og en linje *er* en ligning. Vi illustrerer, hvordan modellen fungerer, med et eksempel i Appendiks B.

Hilbert har på et tidspunkt tilkendegivet, at punkter, linjer og planer lige så godt kunne være stole, borde og ølkrus ! Vi er tilbøjelige til at opfatte hans udtalelse som en provokation[6)], for hvem gad overhovedet beskæftige sig med Hilberts aksiomssystem, hvis ikke det repræsenterede den euklidiske geometri ? Og inspirationen til modellen er indlysende ikke borde, stole og ølkrus, men derimod den analytiske geometri. Opgaveforfatteren har foretaget studier af elementerne ølkrus, borde og stole og deres indbyrdes relationer i mange år. Hvis disse studier skulle udmøntes i en aksiomatisk model, ville den få et ganske andet udsende end Hilberts model.[7)]

Hersh rammer formalismens bløde punkt, når han på side160 skriver: *Hilbert's formalism, like logicism, offered certainty and reliability for a price. The logicist would save mathematics by turning it into a tautology. The formalist by turning it into a meaningless game.*

Vi forlader Hilbert & Co. på det allermest spændende tidspunkt. I slutningen af 1800-tallet var der konstateret revner flere steder i matematikkens fundament. Skaderne er tilsyneladende udbedret ved aksiomatisering. Vi mangler kun lige at få de sidste brikker på plads i form af en konsistent teori for de reelle tal. Poincarré har et optimistisk indlæg om matematikkens grundlag ved Verdenskongressen år 1900, og Hilbert søsætter sit berømte program for matematikken i det 20. århundrede ved samme lejlighed. Alt ånder tilsyneladende fred og idyl.

(fortsættes)

Noter

1) Efter at have skrevet opgaven færdig er jeg blevet opmærksom på, at en række forfattere læser Euklids andet postulat anderledes, end Eves og jeg gør. F.eks. skriver Vagn Lundsgaard Hansen øverst på side 49: "I postulat 2 udtrykkes, at et linjestykke kan forlænges til andre linjestykker, som ligger 'ud i et', eller med vore dages fortolkning af en ret linje, at en ret linje har ubegrænset længde".

2) Efter flere timers søgning på biblioteker og på nettet efter en grundig gennemgang af Poincarrés model fandt opgavens forfatter denne lille perle hjemme i sin egen bogreol !

3) Nogenlunde den samme udvikling gennemgik de reelle tal i løbet af det 19. århundrede, hvor de fik konkurrence af de komplekse tal og kvaternionerne. Fra at være de i en vis forstand sande tal (de, der var a priori givne) blev de et alternativ blandt flere. Det giver ligesom for geometrien anledning til grundlagsteoretiske overvejelser.

4) Downloadet fra http://gallica.bnf.fr, hvor der findes en stor samling af matematiske hovedværker lige til at downloade !

5) Jeg går ud fra, at den konkrete udformning skyldes Brassinne, men der er tale om konstruktioner omtalt i Fermats tekst.

6) Og Hilberts formalisme provokerede i hvert fald Frege! I *Jahresbericht DMV 12* (1903) gav han Hilbert følgende ord med på vejen: *Von altersher nennt man Axiom einen Gedanken, dessen Wahrheit feststeht, ohne jedoch durch eine logische Schlusskette bewiesen zu werden können.. Erklärung. Wir denken uns Gegenstände, die wir Götter nennen. Axiom 1. Jeder Gott ist allmäctich. Axiom 2. Es gibt wenigstens einen Gott.* (Citeret fra Mejlbo appendiks 5, side 14)

7) Der er en bemærkelsesværdig forskel på den måde, Hilbert præsenterer sit aksiomsystem på og præsentationen i Eves. *Grundlagen der Geometrie* er illustreret (se f.eks. den fotografiske gengivelse i appendiks 6 i Mejlbo). Eves medtager ikke en eneste illustration, men forklarer flere gange med ord, hvad Hilbert illustrerer med en figur. På den måde bliver Hilbert gjort til mere rendyrket formalist, end han var. Behøver vi nævne, at illustrationerne ikke forestiller stole, borde og ølkrus ? Da jeg ikke er i besiddelse af 1968-udgaven, som Eves henviser til, og de mellemliggende udgaver, kan jeg ikke afgøre, om Eves eller forlæggeren (ubevidst ?) manipulerer læseren, eller der er tale om en udvikling, som Hilbert selv har gennemløbet.

Kilder

[1] Bonola, Roberto (1955): *Non-Euklidean Geometry*, Dover (uændret genoptryk af original fra 1912)

[2] Brassinne, E. (1985): *Précis des Oevres Mathématique de P. Fermat et de l'Artmétique de Diophante*, Éditions Jaques Gabay (fotografisk genoptryk af original fra 1853).

[3] Descartes, René (1991): *La Géométrie*, Éditions Jaques Gabay (fotografisk genoptryk af original fra 1886).

[4] Eves, Howard (1997): *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, *3. ed.*, Dover.

[5] Fauvel, John & Gray, Jeremy (1987): *The History of Mathematics*, MacMillan Press.

[6] Hersh, Reuben (1998): *What is Mathematics, Really ?*,Vintage.

[7] Katz, Victor (1995): A History of Mathematics, HarperCollins College Publishers

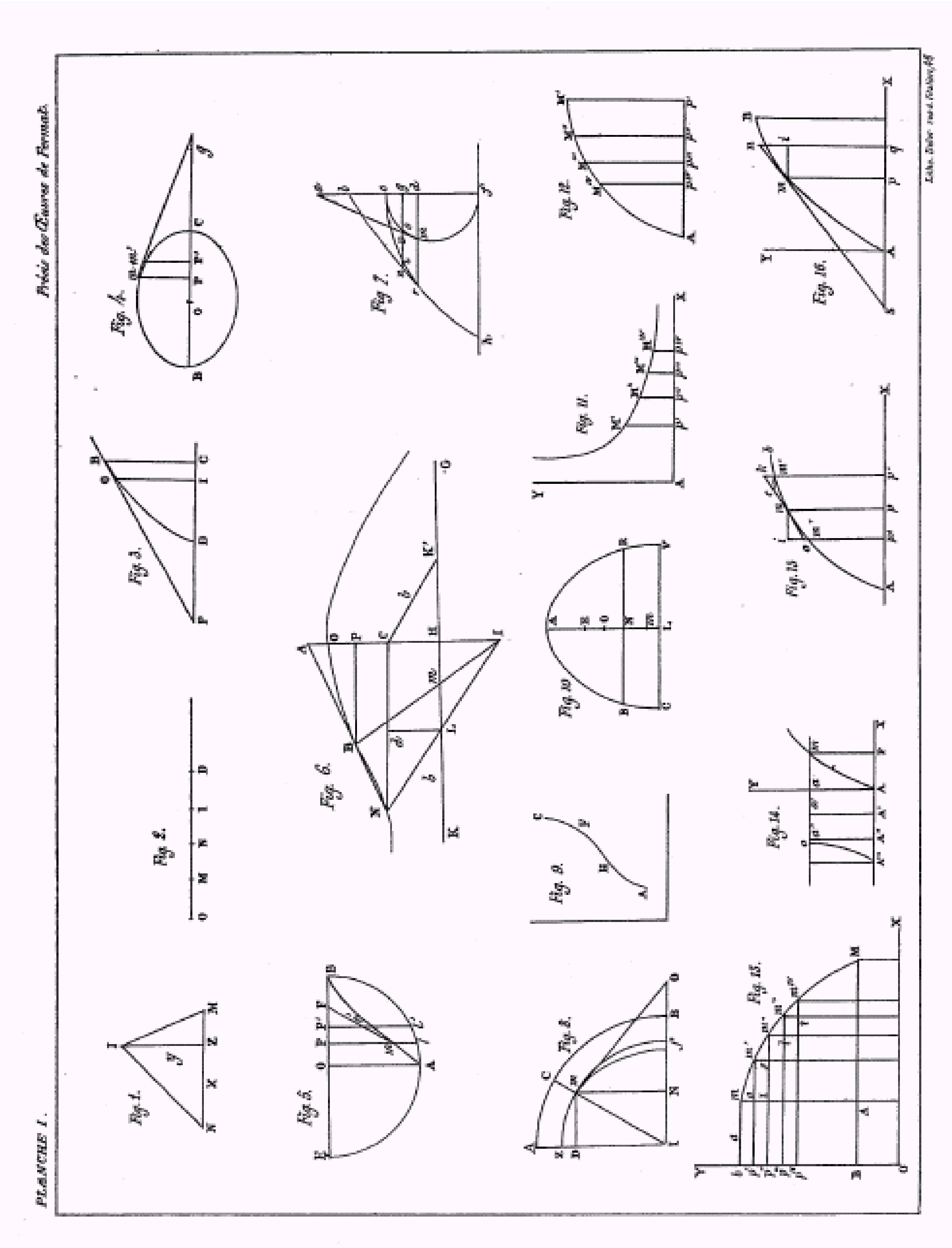
[8] Lundsgaard Hansen, Vagn (1995): *Ikke-euklidisk geometri i støbeskeen*, side 47-73 i *Matematiske Essays* (red. Jens Carstensen og Sven Toft Jensen), Matematiklærerforeningen.

[9] Mejlbo, Lars C. (1989): *Om den elementære geometris historie*, Matematisk Institut, Aarhus Universitet.

CD

Den vedlagte CD indeholder en elektronisk udgave af opgaven (forsidebilledet er klikbart). Ud over de allerede nævnte kilder indeholder CD'en den java-applet, der gemmer sig bag forsiden (downloadet fra http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid), og en interaktiv udgave af indledningen til Descartes *La Géométrie* (downloadet fra http://membres.lycos.fr/debart/geometrie/renedescartes.html) med tilhørende hjælpeprogrammer.

Appendiks A



Appendiks B

Vi gennemfører nedenfor beviset for, at Hilberts model for den euklidiske geometri opfylder postulatet I-1:

Sætning

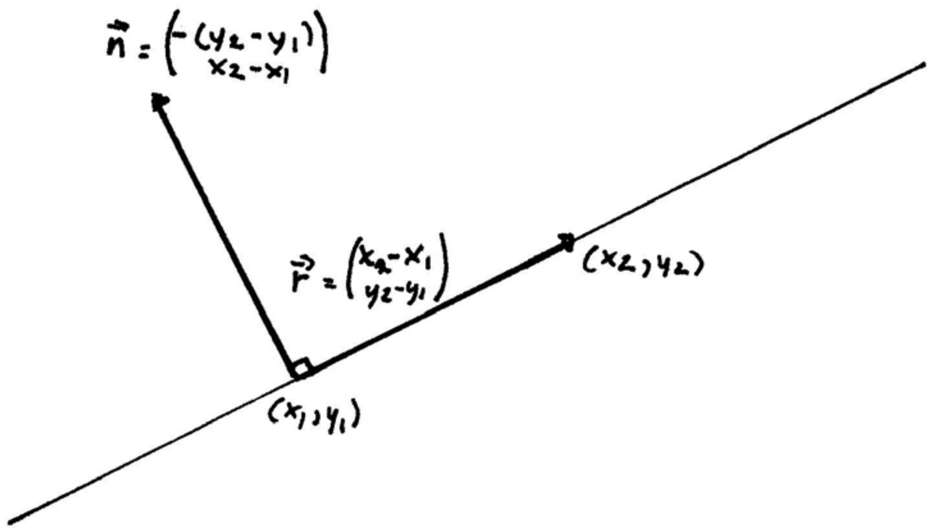
Der går en og kun en linje af formen $ax+by+c=0$ gennem to givne forskellige punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Bevis

Lad de to forskellige punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) være givne

Vi starter med at vise, at der går mindst én linje af formen $ax+by+c=0$ gennem de givne punkter.

Vi lader os inspirere af den sædvanlige euklidiske geometri og ser på af figuren



Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

har en repræsentant på linjen gennem (x_1, y_1) og (x_2, y_2). Tværvektoren kan derfor bruges som normalvektor til linjen.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

Som dermed får ligningen:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$-(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0 \quad (*)$$

Læg mærke til, at resultatet er rent algebraisk. Det ses umiddelbart, at ligningen er opfyldt for $(x,y)=(x_1,y_1)$ hhv. (x_2,y_2). Altså at punkterne (x_1,y_1) og (x_2,y_2) ligger på linjen med ligningen $(*)$ – vel at mærke i henhold til Hilberts definition af relationen "ligger på". (Ligningen $(*)$ *er* af den ønskede form $ax+by+c=0$. Det ses ved at gange parenteser ud).

Vi viser nu, at linjen $ax+by+c=0$ gennem (x_1,y_1) og (x_2,y_2) er entydigt bestemt. Ifølge Hilberts definition af relationen "ligger på" er både $ax_2+by_2+c=0$ og $ax_1+by_1+c=0$.

Vi bemærker straks, at disse ligninger bestemmer c, så snart vi kender a og b! Ved subtraktion af de to ligninger fås

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0 \quad (**)$$

Vi deler nu undersøgelsen op i to dele:

$\boxed{x_1 = x_2}$

Da $x_1=x_2$, er $y_1 \neq y_2$, da de to punkter (x_1,y_1) og (x_2,y_2) var forskellige. Af ligningen $(**)$ følger nu, at *b=0*. Ved indsættelse i f.eks. $ax_2+by_2+c=0$ fås $ax_2+c=0 \Leftrightarrow c=-ax_2$. I alt fås

$$(a,b,c)=t(1,0,-x_2), t\in R\setminus\{0\}.$$

$\boxed{x_1 \neq x_2}$

Da $x_1 \neq x_2$ kan vi dividere ligningen $(**)$ igennem med x_2-x_1, hvoraf følger, at

$$a=-b\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Sættes den fundne værdi for a ind i f.eks. $ax_2+by_2+c=0$ fås

$$c=b\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_2-by_2=b\frac{y_2x_1-y_1x_2}{x_2-x_1}.$$

Alt i alt fås

$$(a,b,c)=t(-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},1,\frac{y_2x_1-y_1x_2}{x_2-x_1})\ , t\in R\setminus\{0\}.$$

Hermed er entydigheden bevist (idet en linje hos Hilbert er en ækvivalensklasse af ligninger, hvor to ligninger er ækvivalente, hvis den ene fremgår af den anden ved multiplikation med et tal $\neq 0$).

Ovenstående bevis adskiller sig fra beviset i Eves, side 95, *ved ikke at tilsløre den geometriske inspiration*.