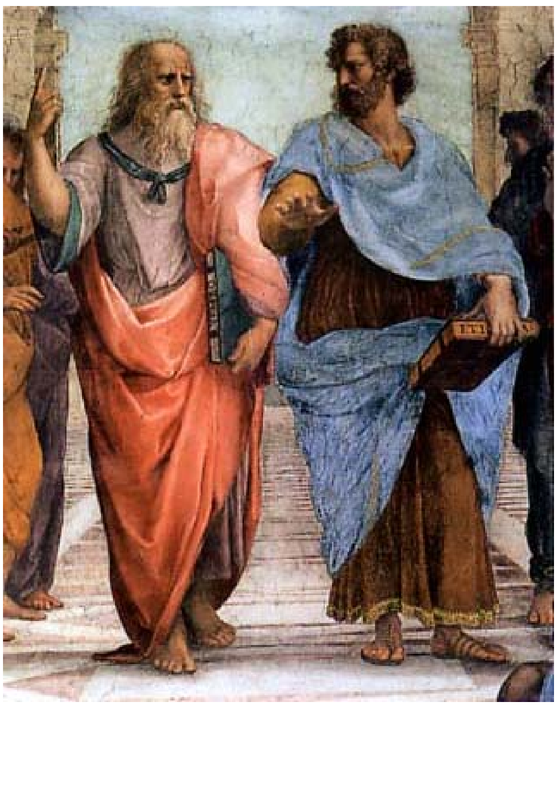
Oldtidens matematik og filosofi

Jørgen Ebbesen



Oldtidens matematik og filosofi.

Her fokuseres særligt på græsk matematik og filosofi, og især på samspillet derimellem. Desuden bør man komme ind på, hvorledes fx Platon, Euklid og Arististoteles har påvirket nyere tænkning indenfor matematikkens filosofi.

Sigtet med opgaven er dobbelt. Vi har dels forsøgt at beskrive udviklingen af den deduktive metode. Dels forsøgt at skitsere baggrunden for det fremherskende synspunkt i århundreders matematik filosofi – helt op til moderne tid: at matematikkens kerne – tallene og formerne – har sin egen eksistens, som er eviggyldig og hævet over mennesket (platonisme). Dobbelt sigte risikerer at gøre en skeløjet, men de to historier, vi ønsker at fortælle, er så tæt forbundne, at de ville være svære at skille ad.

Når man ønsker at finde svaret på spørgsmålet "*Hvad er matematik ?*", er det naturligt at søge tilbage til matematikkens rødder. Vi starter med et historisk rids på grundlag af det første kapitel hos Eves.[1]

Desværre skrev kineserne og inderne, som vi mener har bidraget væsentligt til oldtidens matematik, på bambus og bark, som forlængst er gået til grunde. Vi indskrænker os derfor til babylonerne og ægypterne, når vi skal studere den førgræske matematik.

Babylonerne skrev kileskrift på lertavler. Der er bevaret over 500.000 babylonske lertavler fordelt på museer rundt omkring i verden. Af disse er omkring 100 gennemregnede opgavesamlinger ordnet efter stigende sværhedsgrad og lidt mere end 200 tabeller.

Ægypterne huggede hieroglyffer i sten og skrev på papyrus, som er bevaret pga. det usædvanligt tørre klima i Ægypten. Papyrus Rhind 1650 f.v.t. og den lidt ældre Moskva papyrus er hovedkilderne til den ægyptiske matematik.

Babylonerne og ægypternes matematik kan med en fællesbetegnelse kaldes for *empirisk-operationel*. Der er tale om instruktioner i, hvordan opgaver skal løses. Opgaverne er langt fra alle trivielle. Der kan være tale om løsning af andengradsligninger, og den pythagoræiske sætning om siderne i den retvinklede trekant var også delvis kendt. Der er ingen antydning af egentlig bevisførelse, men da resultaterne som regel er rigtige, må disse være blevet verificeret på anden vis, sandsynligvis empirisk. Empiriens svaghed viser sig ved, at nogle af resultaterne (f.eks. babylonernes formel for arealet af en vilkårlig firkant og ægypternes formel for arealet er en cirkel) måske har fungeret i praksis, men i virkeligheden var forkerte. Afslutningsvis skal det nævnes, at betegnelsen empirisk-operationel om den førgræske matematik ikke er udtømmende. Frasen *sådan er fremgangsmåden* i ægyptiske papyrus tyder på, at udregningerne blev opfattet som eksemplificering af en overordnet, uskreven teoridannelse. På samme måde må babylonernes praksis med eksempelsamlinger antages at tegne et omrids af det, der eksemplificeres.

I løbet af perioden 600-300 udvikledes den *deduktive metode* i det antikke Grækenland.Vi har ingen samtidige kilder til belysning af udviklingen, men er nødt til at bygge på sekundære kilder. Vores hovedkilde er Proklos, som i det 5. århundrede e.v.t. kommenterede Euklids 1. bog. Han havde en række kilder til sin rådighed, som nu er gået tabt. Blandt andet en gennemgang af den græske geometris historie forfattet af Eudemus (elev af Aristoteles) 335 f.v.t.

Thales fra Milet (ca. 624-548) importerede geometrien fra Ægypten. Ifølge Proklos introducerede Thales den deduktive metode.

Pythagoras (ca. 572-490) blev født på Samos, som ligger i nærheden af Milet, så han kan have studeres hos Thales, som Proklos hævder. Pythagoras menes at have foretaget rejser i Ægypten og Orienten. Ved sin hjemkomst bosatte han sig i Syditalien (som dengang var græsk), hvor han grundlagde det pythagoræiske broderskab.

Flere af pythagoræernes resultater var empirisk kendt af babylonerne, men pythagoræerne udledte dem ved brug af den deduktive metode. De studerede blandt andet talteori, så på parallelle linjer og vinkelsummen i en trekant, konstruerede en sammenhængende geometrisk tolkning af aritmetikken og opdagede irrationaliteten af $\sqrt{2}$. Pythagoras og pythagoræerne dyrkede talmystik og troede på sjælevandring. I den mere kuriøse ende af skalaen skal nævnes et sæt leveregler, der blandt andet forbød dem at spise bønner.

Er vore kilder troværdige ? Set fra en kildekritisk synsvinkel er tidsintervallet, som Eudemus dækker, så langt, at han såvel som den endnu senere Proklos dårligt har kunnet undgå at tolke begivenhederne i lyset af deres egen tid i stedet for at blotlægge de historiske kendsgerninger. Kritikere fremhæver for eksempel, at det er usandsynligt, at Thales skulle have følt behov for at bevise så indlysende påstande som dem på side 11 i Eves. Dette behov dukker først op, når man har nået et langt mere avanceret niveau i aksiomatiseringsprocessen.

Vi vil derfor tillade os nogle betragtninger af mere spekulativ karakter. Irrationaliteten af $\sqrt{2}$ var et chok for pythagoræerne, som havde baseret deres verden på naturlige tal og forhold mellem disse. Her har vi måske nøglen til grækernes udvikling af den deduktive metode: Hvis det, man tog for givet, viser sig at være forkert, bliver man nødt til at gå sine forudsætninger kritisk igennem, før man sætter noget andet i stedet, for at hele korthuset ikke skal vælte en gang til. Mange af de gamle resultater er stadig gyldige, så man må udvikle metoder til at afgøre hvilke. Eves nævner på side 10 to andre mulige forklaringer på, at grækerne løftede matematikken fra empiri til logisk deduktion i perioden 600-300:

- Den æstetiske. Deduktionens orden, konsistens, fuldstændighed og overbevisende slagkraft tiltalte grækernes skønhedssans.
- Den sociologiske. Grækerne havde slaver til det grove, og satte derfor en ære i at skille teorien fra praktikken.

Der skulle nu være varmet op til opgavens to hovednavne Platon (427-347) og Aristoteles (384-322).

I gennemgangen af Platon og Aristoteles har vi valgt at fokusere på nogle ganske få aspekter med særlig relevans for den matematiske filosofi. Undervejs har vi støttet os til Witt-Hansen[3], til hvem der henvises for en mere udførlig gennemgang.

Platon var elev af Sokrates. Efter dennes død tog Platon på studierejser, der førte ham vidt omkring. Blandt andet til Kyrene, hvor han studerede matematik, og til Syditalien, hvor han mødte pyhagoræerne Archytas og Timaios. Platon blev solgt som slave til Sparta, men havde heldigvis venner, som var i stand til at købe ham fri. Og der blev endda penge tilovers. Dem brugte Platon til at grundlægge sit berømte Akademi i Athen.

Inspiration fra pythagoræerne i Platons filosofi er tydelig. Så tydelig, at han blev beskyldt for at have skrevet sit natur- og matematikfilosofiske hovedværk, Timaios, af. (Læs den slibrige historie i [3], side 53).

Inspireret af pythagoræerne mente Platon, at ideerne var evige og uforanderlige. Da alt, vi kan erkende gennem vore sanser, er foranderligt, er ideerne hævet over disse. Ordet hest dækker over en ide uden for tid og rum. Det er denne ide, der er virkelig. De heste, vi støder på i den verden, vi kan sanse, er kun ufuldkomne fænomener. Eksemplet med hesten skyldes Platon selv. Det overlades til læseren som en let lille øvelse at substituere hesten med forskellige matematiske objekter, så som en ret linje, en cirkel, en trekant, tallet 7..

Platons ideer kan ikke sanses. Der melder sig et påtrængende problem: Hvordan skal man så erkende dem ? Svaret er, at sanserne – hvor svigefulde de end måtte være – kan hjælpe sjælen til at erindre ideen. Vel at mærke en erindring, som går tilbage til en tidligere tilværelse, hvor den udødelige sjæl (jf. Pythagoræernes tro på sjælevandring) har erkendt ideerne. Der lærte sjælen matematikkens grundsætninger. Erindringen kan hjælpes på vej ved en dialog, der præciserer og tydeliggør begreberne. Det er netop en sådan erkendelse gennem erindring (anamnese), der illustreres i dialogen Menon, som vi studerede i timerne, se evt. [3] side 138-145.

Det er ikke nogen tilfældighed, at Platon bruger et matematisk eksempel. Matematikken spillede en central rolle i Platons filosofi. Over indgangen til Platons Akademi stod skrevet: *Den, der er ukyndig i geometri, har ingen adgang.* Vi genfinder desuden pythagoræernes talmystik hos Platon. Ifølge Hersh[2], side 102 skulle der lige frem have eksisteret en uskreven doktrin ved Platons Akademi om, at *"**alle** ideer var tal, måske kun de fire første tal {1,2,3,4}, eller måske endda kun de første to tal (1,2)!"* Det minder unægteligt, som Hersh også påpeger (med slet skjult ironi ?), om Freges tanker i forbindelse med mængdelæren.

Aristoteles var lidt af en evighedsstudent. Han var elev ved Akademiet under Platon i 20 år. Han afviste Platons idelære på det hånligste, se f.eks. Hersh side 184 nederst. Han erstattede Platons ideer med former, som var tingene iboende. Disse former var lige som Platons ideer evige og uforanderlige. (Da den fysiske verden er foranderlig, er Aristoteles nødt til at indføre en dynamik, der kan forklare, hvordan formerne underkastes substantielle ændringer). Der, hvor vandene for alvor skiller, er erkendelsesteorien. Hos Platon var sanserne bedrageriske. Hos Aristoteles er de en hjælp til at erkende tingenes sande form. Erkendelse hos Aristoteles er sansebaseret empirisk generalisation, se [3] side 170-171.

Den deduktive metode er velbeskrevet hos Aristoteles, se f.eks. det kommenterede uddrag af Analytica posteriora i [1] side29-31. Aristoteles delte ikke Platons begejstring for matematikken. Men hans logik, se [3] side175-193, er en kraftpræstation inden for emnet, som vi idag opfatter som en vigtig del af matematikkens grundlag.

Pudsigt nok var det ifølge [3] side 192 ikke den aristoteliske logik og den heri indeholdte deduktive metode, der inspirerede Gallilei, Kepler, Descartes, Newton, Huygens, Newton m.fl., men den konkrete eksemplificering i form af den euklidiske geometri, som vi vil vende tilbage til i en senere opgave. Hvor om alting er: Den deduktive metode har gået sin sejrsgang. Det er *metoden*, som alle matematikere benytter sig af, i hvert fald når resultaterne skal præsenteres. (Det har forledt svage sjæle til at tro, at matematikken i sit væsen er deduktiv. Enhver, der selv har beskæftiget sig med at lave matematik, ved, at det ikke er tilfældet. Som bemærket af Lakatos, se [2] side 210-212 , er en matematikfilosofi, som ikke tager højde for, hvordan matematikken rent faktisk bliver til, ikke dækkende. Forskydningen af fokus fra matematikkens ontologi til epistemologien er forfriskende, når man tager i betragtning, hvilke problemer ontologien volder os filosofisk, se nedenfor).

Som det fremgik af indledningen, satte Platons idelære sig dybe spor. Hersh har gjort det let for os at føge sporene. Hersh opdeler matematikkens filosoffer i to kategorier, nemlig *mainstream* filosofferne, som er Platons åndelige efterkommere, og *humanists and mavericks*, som repræsenterer modsynspunktet: at matematik er en menneskelig aktivitet med menneskeskabte objekter (Hersh' socio-kulturelle-historiske humanisme). Sidehenvisningerne i det følgende er til Hersh.

Under *mainstream* placerer Hersh navne som Descartes, Spinoza, Leibniz, Kant (kun delvis), Frege, Russel og naturligvis Platon og Pythagoras. Medens navne som Locke, Hume, Mill, Wittgenstein, Popper, Lakatos og naturligvis Aristoteles er at find under *humanists & mavericks*.

Opdelingen er naturligvis ikke entydig. Lad os som et eksempel se på Thomas Aquinas. Hersh placerer ham under platonisterne, men som Hersh selv er inde på, er han svær at placere. I sin omtale af matematikkens objekter og indplacering af matematikken mellem teologien og naturvidenskaben, se side 107 øverst er han platonist. Men i sin omtale af matematiske objekter, citeret fra side 107 nederst: *"Mathematics is concerned with these things which depend on sensible matter for their actual being but not for their rational meaning"* er han tydelig inspireret af Aristoteles.

Vi skal afstå fra en systematisk gennemgang af platonismen i matematikkens filosofi, men nøjes med spredte nedslag:

- *Descartes* (1596-1650) beviser Guds eksistens under henvisning til geometrien, se "beviset" side 117. Det er en platonisme, der vil noget !

- *Spinoza* (1632-1677) går nærmest den modsatte vej og "modbeviser", at Gud har skabt verden, se side 121. Det er udtryk for tillid til den deduktive metode!

- *Leibniz* (1646-1716) har, som Hersh bemærker side 126, en enkel løsning på diskussionen om matematikkens ontologi: Det er Guds tanker ! (bemærk parallellen til Platons anamnese).

- Der er en direkte linje tilbage til Platon (og Euklid) i *Kants* (1724-1804) teori om tids- og rumlig intuition (syntese a priori).

- *Russel* (1872-1970) lagde ikke skjul på, at hans arbejde med at sikre matematikkens grundlag også var et forsøg på at finde et eksistentielt grundlag, se side 151. Bemærk de direkte referencer til Platon og Pythagoras.

Opdagelsen af de ikke-euklidiske geometrier (mere præcist: påvisningen af, at de ikke-euklidiske geometrier er konsistente, hvis den euklidiske er det) omkring midten af 1800-tallet gav nådesstødet til Kants teori om syntese a priori. Man skulle tro, at den matematiske platonisme led skibbrud ved samme lejlighed (geometrien var ikke helt så eviggyldig, uforanderlig, overmenneskelig og hævet over vore sanser, som Kant og Platon før ham mente). Som bekendt fandt platonismen snarere nye veje i studiet af matematikkens grundlag.

Platons fornægtelse af erkendelsen gennem sanserne, har gjort hans filosofi svær at sluge for moderne filosoffer, der netop kun accepterer erkendelse med udspring i sanserne.

Men som Hersh bemærker, er de fleste matematikere stadig søndagsplatonister.

[1] Eves, Howard (1997): *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, *3. ed.*, Dover.
[2] Hersh, Reuben (1998): *What is Mathematics, Really ?*, Vintage.
[3] Witt-Hansen, Johannes (1970): *Den antikke filosofis historie, 2.udg.*, Munksgaard.

Forsidebillede Rafael (1509-10): *Skolen i Athen*, Vatikanpaladset. En kommenteret udgave findes på

http://www.unesco.org/phiweb/fr/raphael/raphael.html.